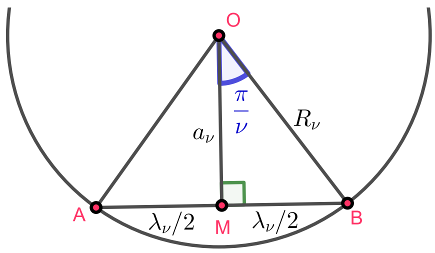
ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΤΟΥ ΗΡΩΝΟΣ

ΗΛΙΑΣ ΛΑΜΠΑΚΗΣ-4ο Γυμνάσιο Πύργου



Ένα τρίγωνο με ακέραιες πλευρές και ακέραιο εμβαδόν καλείται τρίγωνο του Ήρωνος, [**1,2**], προς τιμήν του αρχαίου Έλληνα Μηχανικού και Μαθηματικού Ήρωνος του Αλεξανδρεύ που έζησε μεταξύ 10 μ.Χ. έως 75 μ.Χ.

Κατ΄ αναλογία, ένα κανονικό πολύγωνο με ακέραιη πλευρά και ακέραιο εμβαδόν θα καλείται κανονικό πολύγωνο του Ήρωνος. Υπάρχουν όμως κανονικά πολύγωνα του Ήρωνος και αν υπάρχουν πόσα και ποια να είναι; Ας συμβολίσουμε, ως συνήθως, με ν το πλήθος των πλευρών, λ_ν το μήκος των πλευρών, a_ν το απόστημα, R_ν την ακτίνα, $\hat{\omega}_\nu = 2\,\pi/\nu$ την κεντρική γωνία, E_ν το εμβαδόν ενός κανονικού ν–γώνου. Τότε, $\nu \geq 3$, $\hat{\omega}_\nu/2 = \pi/\nu$ και,

$$R_\nu = \frac{\lambda_\nu}{2\ \text{ημ}(\pi/\nu)}\,,\ a_\nu = R_\nu\ \text{συν}(\pi/\nu) = \frac{1}{2}\,\lambda_\nu\ \text{σφ}(\pi/\nu),$$

$$E_\nu = \nu\,\frac{1}{2}\,\lambda_\nu\,a_\nu = \nu\,\frac{1}{4}\,\lambda_\nu^2\ \text{σφ}(\pi/\nu).$$

Σε ένα κανονικό πολύγωνο του Ήρωνος το μήκος της πλευράς λ_ν και το εμβαδόν E_ν είναι ακέραιοι. Άρα, η σφ(π/ν) πρέπει να είναι ρητός. Οπότε, και η εφ(π/ν) πρέπει να είναι ρητός.

Όμως, το Πόρισμα 1 της Ενότητας 2 στην δημοσίευση [**3**] μας λέει ότι οι μόνες ρητές τιμές της εφ$(k\,\pi/\nu)$, για k ακέραιο, είναι 0, ± 1. Στην περίπτωσή μας, $k = 1$ και $\nu \geq 3$ που σημαίνει,

$$0 < \frac{\pi}{\nu} \leq \frac{\pi}{3}.$$

Η μόνη ρητή τιμή της εφ(π/ν) είναι 1 που συνεπάγεται $\nu = 4$. Μόνο το τετράγωνο μπορεί να είναι κανονικό πολύγωνο του Ήρωνος με μήκος πλευράς λ_4 ακέραιο και εμβαδόν $E_4 = \lambda_4^2$ επίσης ακέραιο.

Βιβλιογραφία

1. `https://en.wikipedia.org/wiki/Heronian_triangle`
2. J. R. Carlson, *Determination of Heronian Triangles*,
   `https://www.fq.math.ca/Scanned/8-5/carlson-a.pdf`
3. J. S. Calcut, *Rationality and the Tangent Function*,
   `https://www2.oberlin.edu/faculty/jcalcut/tanpap.pdf`,
   `http://www.ma.utexas.edu/users/jack/`