ΓΙΑΤΙ ΤΟ ΤΟΞΟ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΕΙΝΑΙ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗ ΤΟΥ ΧΟΡΔΗ;

ΗΛΙΑΣ ΛΑΜΠΑΚΗΣ-4ο Γυμνάσιο Πύργου

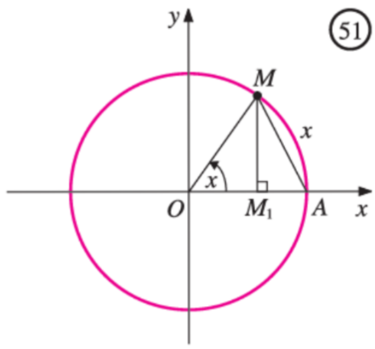
Στο βιβλίο Μαθηματικών Γ′ Γενικού Λυκείου, Β′ Μέρος, (ομάδας προσανατολισμού θετικών σπουδών & υγείας και σπουδών οικονομίας & πληροφορικής), στη σελίδα 52 βρίσκουμε το πιο κάτω κείμενο σε σχέση με τα τριγωνομετρικά όρια και την χρήσιμη για την μελέτη τους ανισότητα, $|\eta\mu(x)| \leq x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

Τριγωνομετρικά όρια

Το κριτήριο παρεμβολής είναι πολύ χρήσιμο για τον υπολογισμό ορισμένων τριγωνομετρικών ορίων. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι:

$|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
(η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ*



— Για $x = 0$ προφανώς ισχύει η ισότητα.

— Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ από το διπλανό σχήμα έχουμε

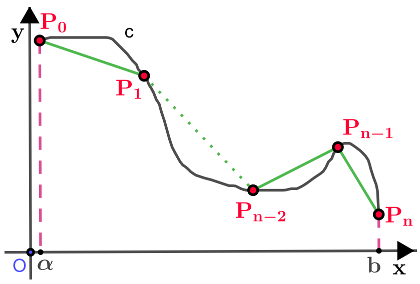
$$\eta\mu x = (MM_1) < (MA) < (\text{τοξ}MA) = x.$$

Άρα

$$|\eta\mu x| < |x|, \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

Είναι εμφανές ότι, η σχολική απόδειξη της ως άνω ανισότητας στηρίζεται στην ανισωτική σχέση $(MA) <$ (τοξ MA) δηλαδή, το μήκος της χορδής MA είναι μικρότερο από το μήκος του αντίστοιχου τόξου MA.

Αυτό, αναφέρεται χωρίς απόδειξη, ως σαν να είναι προφανές. Διαισθητικά, όντως αντιλαμβανόμαστε ότι το μήκος μιας χορδής είναι μικρότερο από το μήκος κάθε καμπύλης με άκρα τα άκρα της χορδής. Αλλά πώς θα μπορούσαμε να το αποδείξουμε αποκλειστικά με την χρήση Μαθηματικών Γ′ Λυκείου; (Στην Μαθηματική βιβλιογραφία, υπάρχει απόδειξη στα πλαίσια του Calculus of Variations κατά πολύ εκτός των Μαθηματικών της Γ′ Λυκείου).



α). Ας θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση μίας λείας καμπύλης c. Με τον όρο λεία εννοούμε ότι η συνάρτηση f, της οποίας γραφική παράσταση είναι η c, έχει συνεχή πρώτη παράγωγο. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι καθώς το σημείο επαφής μίας εφαπτομένης ευθείας της c διατρέχει την c, δεν συναντά καμπυλοειδείς γωνίες ή διασταυρώσεις της καμπύλης. Θεωρούμε μία επιλογή $n+1$ σημείων,

$$P_0(x_0, f(x_0)), P_1(x_1, f(x_1)), \ldots, P_{n-1}(x_{n-1}, f(x_{n-1})), P_n(x_n, f(x_n)),$$

της c με $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i > x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Το ευθύγραμμο τμήμα $P_{i-1}P_i$ έχει μήκος,

$$\mathcal{L}_{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \tag{1}$$

Το μήκος της πολυγωνικής γραμμής $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n$ είναι το άθροισμα των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων $P_0P_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}P_n$ και ισούται με,

$$\mathcal{L}_{P_0 \ldots P_n} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \tag{2}$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την f, υπάρχει $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ ώστε,

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}), \tag{3}$$

για $i = 1, 2, \ldots, n$. Η (2) λόγω της (3) γίνεται,

$$\mathcal{L}_{P_0 \ldots P_n} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1}). \tag{4}$$

Καθώς το n αυξάνει, το πλήθος των σημείων επί της καμπύλης επίσης αυξάνει και τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται κατά τον πιο πάνω περιγραφέντα τρόπο γίνονται μικρότερα σε μήκος και προσεγγίζουν όλο και πιο κοντά την καμπύλη. Το άθροισμα των μηκών τους προσεγγίζει όλο και πιο πολύ το μήκος της καμπύλης.

Το άθροισμα (4) είναι ουσιαστικά ένα άθροισμα Riemann για την συνάρτηση f'. Το όριο των αθροισμάτων (4) καθώς $n \to +\infty$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός γιατί η f' έχει υποτεθεί συνεχής, (η καμπύλη είναι λεία). Το όριο είναι θετικός πραγματικός αριθμός. Από τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann,

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1}). \tag{5}$$

Το ολοκλήρωμα (5) δίνει το μήκος του τόξου της καμπύλης ανάμεσα στα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$. Η αντίστοιχη χορδή είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ και μήκος,

$$\sqrt{(b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2}. \tag{6}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι,

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx > \sqrt{(b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2}. \tag{7}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ με,

$$F(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt - \sqrt{(x-a)^2 + (f(x) - f(a))^2}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sqrt{1+[f'(x)]^2} - \frac{(x-a) + (f(x)-f(a))\, f'(x)}{\sqrt{(x-a)^2 + (f(x)-f(a))^2}} = \\ &= \frac{\left(\sqrt{(x-a)^2+(f(x)-f(a))^2}\right)\left(\sqrt{1+[f'(x)]^2}\right) - [(x-a)+(f(x)-f(a))\, f'(x)]}{\sqrt{(x-a)^2+(f(x)-f(a))^2}}. \end{aligned}$$

Θέτουμε $g(x) = (x-a) + (f(x) - f(a))\, f'(x)$ και διαμερίζουμε το σύνολο (a, b) σε δύο ξένα μεταξύ τους υποσύνολά του τα, $\mathcal{N} = \{x \in (a,b) \,:\, g(x) < 0\}$, $\mathcal{PZ} = \{x \in (a,b) \,:\, g(x) \geq 0\}$. Τότε, $(a,b) = \mathcal{N} \cup \mathcal{PZ}$.

Επίσης θέτουμε,

$$n(x) = \left(\sqrt{(x-a)^2 + (f(x) - f(a))^2}\right)\left(\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\right) - g(x).$$

$n(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathcal{N}$.

Επιπλέον,

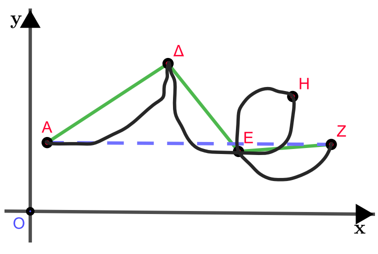
$$\begin{aligned} [(x-a)^2 + (f(x) - f(a))^2][1 + [f'(x)]^2] - [(x-a) + (f(x) - f(a))\, f'(x)]^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \\ [(f(x) - f(a)) - (x-a)\, f'(x)]^2 > 0,\ \forall\, x \in (a,b), \end{aligned}$$

Τονίζουμε ότι αν $(f(x) - f(a)) - (x-a)\, f'(x) = 0$ για κάποιο $x \in (a,b)$ τότε, η ευθεία δια των σημείων $(a, f(a))$, $(x, f(x))$ και η εφαπτομένη της καμπύλης στο $(x, f(x))$ είναι παράλληλες ως έχουσες την ίδια κλίση άτοπο γιατί οι προαναφερθείσες ευθείες διέρχονται από το κοινό σημείο $(x, f(x))$.

Συνεπάγεται λοιπόν ότι,

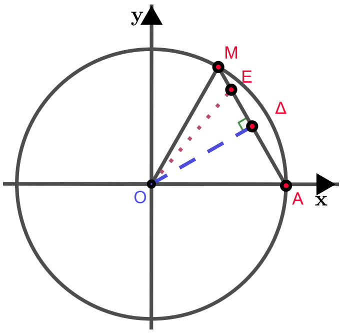
$$\left(\sqrt{(x-a)^2 + (f(x) - f(a))^2}\right)\left(\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\right) > |g(x)|,\ \forall\, x \in (a,b),$$

και άρα, $n(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathcal{PZ}$ αφού $|g(x)| = g(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{PZ}$. Τελικά, $n(x) > 0$ για κάθε $x \in (a,b)$ που συνεπάγεται ότι η $F'(x) > 0$ στο (a,b) και η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[a,b]$. Άρα, $F(b) > F(a) = 0$ που συνεπάγεται την (7).



β). Στην περίπτωση μίας μη λείας καμπύλης c παρατηρούμε ότι αυτή αποτελείται από λεία μέρη. Από την Ευκλείδεια Γεωμετρία, η χορδή AZ του τόξου $A\Delta EHZ$ της c είναι μικρότερη του αθροίσματος των χορδών $A\Delta$, ΔE, EZ των τόξων των μερών της c που είναι λεία. Το προαναφερθέν άθροισμα είναι μικρότερο από το άθροισμα των λείων τόξων $A\Delta$, ΔE, EZ

που με την σειρά του είναι μικρότερο ή ίσο από το μήκος της c.



γ). Βέβαια, στην περίπτωση της απόδειξης του βιβλίου Μαθηματικών Γ′ Λυκείου που παραθέσαμε στην αρχή του παρόντος υπάρχει άλλος στοιχειώδης τρόπος για να δείξουμε ότι $|\eta\mu(x)| \leq x$. Η γωνία $\widehat{OEM}$ ως εξωτερική του ορθογωνίου τριγώνου $O\Delta M$ είναι αμβλεία ενώ η γωνία $\widehat{OME} = \widehat{OM\Delta}$ είναι οξεία. Άρα, $\widehat{OEM} > \widehat{OME}$ και $OM > OE$ επάγοντας ότι το σημείο E είναι εντός του κύκλου. Ομοίως όλα τα σημεία της χορδής AM εκτός των άκρων είναι εντός του κύκλου και το τριγωνικό χωρίο OAM είναι εντός του κυκλικού τομέα OAM. Από τα αξιώματα του εμβαδού γνωρίζουμε ότι όταν ένα χωρίο περιέχεται σε άλλο το εμβαδόν του είναι μικρότερο του εμβαδού του άλλου. Άρα, το εμβαδόν του τριγώνου AOM είναι μικρότερο του εμβαδού του κυκλικού τομέα OAM. Θεωρώντας την $\widehat{AOM} = x$ ακτίνια παίρνουμε,

$$\frac{1}{2} \cdot OM^2 \cdot \eta\mu(x) < \frac{\pi \cdot OM^2 \cdot \widehat{AOM}}{360^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot \widehat{AOM}}{180^\circ} \cdot OM^2 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot OM^2,$$

που επάγει την ζητούμενη ανισότητα.