# ΜΕ ΑΦΟΡΜΗ ΕΝΑΝ ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΣΜΟ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ′ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Στην σελίδα 33 του σχολικού βιβλίου Μαθηματικών Γ′ Γυμνασίου, ενότητα Α.1.3, Πολυώνυμα–Πρόσθεση και Αφαίρεση Πολυωνύμων, διαβάζουμε τα εξής,

## Πολυώνυμα

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε, ότι το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά. Αν δύο τουλάχιστον μονώνυμα δεν είναι όμοια, τότε το άθροισμά τους δεν είναι μονώνυμο αλλά μια αλγεβρική παράσταση, που λέγεται **πολυώνυμο**. π.χ. $3x^2y + 2xy^4 - 5x^3y^3$

Αμέσως πιο κάτω στην ίδια σελίδα διαβάζουμε,

Ειδικότερα, ένα πολυώνυμο που δεν έχει όμοιους όρους λέγεται

- διώνυμο, αν έχει δύο όρους $3\alpha^2 - 2\beta$
- τριώνυμο, αν έχει τρεις όρους. $2x^2 - 3x + 4$

Στην σελίδα 34 της ίδιας ενότητας διαβάζουμε,

## Αναγωγή ομοίων όρων

Αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν όμοια μονώνυμα, ή όπως λέμε όμοιοι όροι, τότε μπορούμε να τους αντικαταστήσουμε με το άθροισμά τους. Η εργασία αυτή λέγεται **αναγωγή ομοίων όρων**.

$$2\alpha^2 - 3\beta + 4\alpha^2 - 5\beta =$$

$$\underbrace{2\alpha^2 + 4\alpha^2} \underbrace{- 3\beta - 5\beta} = 6\alpha^2 - 8\beta$$

Η αρχική αλγεβρική παράσταση, που είχε τέσσερις όρους, συμπτύχθηκε σε μία άλλη με δύο όρους.

Στην σελίδα 35 της ίδιας ενότητας, στις ερωτήσεις κατανόησης, η δεύτερη ερώτηση αναφέρει,

**2** Ποια από τα παρακάτω πολυώνυμα είναι 2ου βαθμού ως προς x;

α) $7 - 3x - 2x^2$

β) $3x^2 - 5x - 3x^2 + 10$

γ) $4x^3 + x^2 - 3x^3 + 2x - x^3 + 6$

δ) $2xy - 3y + 9$

Με βάση τα προαναφερθέντα αποσπάσματα από το σχολικό βιβλίο Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου ο αναγνώστης καταλαβαίνει ότι,

> Κάθε ακέραιη αλγεβρική παράσταση που περιέχει και κάποια ανόμοια μονώνυμα, (τουλάχιστον δύο), είναι πολυώνυμο. Ένα πολυώνυμο όμως εκτός από τα ανόμοια μονώνυμα δύναται να περιέχει και κάποια όμοια μονώνυμα.

Σύμφωνα με όσα αναφέρει το σχολικό βιβλίο Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου η ακέραιη αλγεβρική παράσταση, (ερώτηση κατανόησης 2),

$$4\,x^3 + x^2 - 3\,x^3 + 2\,x - x^3 + 6,$$

είναι ένα πολυώνυμο το οποίο μέσω αναγωγής ομοίων όρων γίνεται απλούστερο πολυώνυμο.

Θα δείξουμε ότι, σύμφωνα με την θεωρεία πολυωνύμων, τα πιο πάνω συμπεράσματα, σε σχέση με την έννοια του πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές έτσι όπως συνάγονται από τα αναφερόμενα στο σχολικό βιβλίο Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου είναι λανθασμένα.

Στα Μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, κυρίως του Λυκείου, ως πολυώνυμο βαθμού $\nu \in \mathbb{N}$ μίας πραγματικής ή μιγαδικής μεταβλητής $x$ με συντελεστές από κάποιο δακτύλιο, (όπως το $\mathbb{Z}$), ή κάποιο σώμα, (όπως τα $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), νοείται κάθε παράσταση της μορφής,

$$a_\nu\, x^\nu + a_{\nu-1}\, x^{\nu-1} + \cdots + a_1\, x + a_0,$$

με $a_\nu, a_{\nu-1}, \ldots, a_1, a_0$ στοιχεία του συνόλου προέλευσης των συντελεστών του πολυωνύμου.

Έτσι, για παράδειγμα, κάθε πολυώνυμο βαθμού $\nu \in \mathbb{N}$ μίας πραγματικής μεταβλητής $x$, με συντελεστές από το $\mathbb{R}$, αντιστοιχεί στον τύπο,

$$f(x) = a_\nu\, x^\nu + a_{\nu-1}\, x^{\nu-1} + \cdots + a_1\, x + a_0,$$

μίας μοναδικής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Όλα αυτά είναι σωστά όταν η μεταβλητή και οι συντελεστές του πολυωνύμου ανήκουν σε ένα σύνολο με άπειρο πλήθος στοιχείων.

Ας θεωρήσουμε όμως το σύνολο,

$$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}, \text{ με},$$

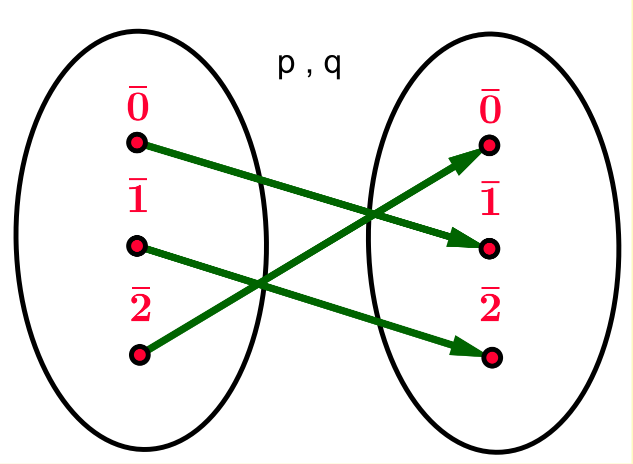
$$\bar{0} = \{a \in \mathbb{Z} : a \equiv 0 \pmod 3\} = \{a \in \mathbb{Z} : a = 3k, \ k \in \mathbb{Z}\},$$
$$\bar{1} = \{a \in \mathbb{Z} : a \equiv 1 \pmod 3\} = \{a \in \mathbb{Z} : a = 3k + 1, \ k \in \mathbb{Z}\},$$
$$\bar{2} = \{a \in \mathbb{Z} : a \equiv 2 \pmod 3\} = \{a \in \mathbb{Z} : a = 3k + 2, \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Αποδεικνύεται ότι το $\mathbb{Z}_3$ εφοδιασμένο με τις πράξεις της «πρόσθεσης» και του «πολλαπλασιασμού»,

$$\bar{a} + \bar{\beta} = \overline{(a + \beta) \pmod 3}, \ \bar{a}, \bar{\beta} \in \mathbb{Z}_3,$$
$$\bar{a} \cdot \bar{\beta} = \overline{(a \cdot \beta) \pmod 3}, \ \bar{a}, \bar{\beta} \in \mathbb{Z}_3,$$

είναι σώμα. Τα πολυώνυμα, $p(x) = x + \bar{1}$, $q(x) = x^3 + \bar{1}$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους, (διαφορετικός βαθμός, όχι όλοι οι συντελεστές ίσοι μεταξύ τους), αλλά για τις συναρτήσεις $p : \mathbb{Z}_3 \mapsto \mathbb{Z}_3$, $q : \mathbb{Z}_3 \mapsto \mathbb{Z}_3$ που δημιουργούν ισχύει,

$$
\begin{aligned}
p(\bar{0}) &= \bar{0}+\bar{1} = \overline{(0+1) \pmod 3} = \bar{1},\\
p(\bar{1}) &= \bar{1}+\bar{1} = \overline{(1+1) \pmod 3} = \bar{2},\\
p(\bar{2}) &= \bar{2}+\bar{1} = \overline{(2+1) \pmod 3} = \bar{0},\\
q(\bar{0}) &= \bar{0}^3+\bar{1} = \overline{(0 \pmod 3)+1) \pmod 3} = \bar{1},\\
q(\bar{1}) &= \bar{1}^3+\bar{1} = \overline{(1 \pmod 3)+1) \pmod 3} = \bar{2},\\
q(\bar{2}) &= \bar{2}^3+\bar{1} = \overline{(8 \pmod 3)+1) \pmod 3} = \bar{0},
\end{aligned}
$$




Δηλαδή, δύο διαφορετικά πολυώνυμα δημιούργησαν την ίδια συνάρτηση.

Αυτό συνέβη γιατί υπάρχουν άπειρα πολυώνυμα με συντελεστές και μεταβλητή από το $\mathbb{Z}_3$ αλλά πεπερασμένο πλήθος μονοσήμαντων αντιστοιχίσεων από το $\mathbb{Z}_3$ στο $\mathbb{Z}_3$ αφού αυτό περιέχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.
Γι΄ αυτό, ο επίσημος Μαθηματικός ορισμός για το τι είναι πολυώνυμο <u>ΔΕΝ</u> είναι αυτός που διδάσκεται στο Λύκειο. Ο επίσημος Μαθηματικός ορισμός για το τι είναι πολυώνυμο πρέπει <u>να μην</u> δημιουργεί αντιφάσεις όπως αυτή που συναντήσαμε πιο πάνω και να καλύπτει όλες τις περιπτώσεις συνόλων από τα οποία λαμβάνουν τιμές οι συντελεστές και η μεταβλητή του πολυωνύμου. <u>Στην περίπτωση βέβαια που το σύνολο από το οποίο λαμβάνουν τιμές οι συντελεστές και η μεταβλητή του πολυωνύμου έχει άπειρα στοιχεία, ο επίσημος Μαθηματικός ορισμός για το τι είναι πολυώνυμο αποδεικνύεται ότι είναι συμβατός με τον ορισμό που διδάσκεται στο Λύκειο.</u>

- Υπενθυμίζουμε ότι, ένα σύνολο λέγεται μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα αν είναι εφοδιασμένο με πράξεις «πρόσθεσης» και «πολλαπλασιασμού» για τις οποίες ισχύουν ίδιες αλγεβρικές ιδιότητες με αυτές που ισχύουν για τις αντίστοιχες πράξεις των ακεραίων.
- Υπενθυμίζουμε ότι, ένα σύνολο λέγεται σώμα αν είναι εφοδιασμένο με πράξεις «πρόσθεσης» και «πολλαπλασιασμού» για τις οποίες ισχύουν ίδιες αλγεβρικές ιδιότητες με αυτές που ισχύουν για τις αντίστοιχες πράξεις των ρητών.

Έστω $R$ ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, (για συντομία στα επόμενα δακτύλιος), $\nu \in \mathbb{N}$, $r_0, r_1, \ldots, r_{\nu-1}, r_\nu$ στοιχεία του $R$ ώστε $r_\nu \neq 0$. Η ακολουθία,

$$p = (r_0, r_1, \ldots, r_{\nu-1}, r_\nu, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

λέγεται πολυώνυμο επί του $R$, μίας «μεταβλητής», βαθμού $\nu$.

Όλα τα στοιχεία της ακολουθίας $p$ μετά το $r_\nu$ είναι μηδέν.

Η ακολουθία $(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ λέγεται μηδενικό πολυώνυμο και δεν ορίζεται βαθμός.

Ο ορισμός που παραθέσαμε πιο πάνω είναι ο επίσημος Μαθηματικός ορισμός για το τι είναι πολυώνυμο μίας μεταβλητής βαθμού $\nu$ επί ενός δακτυλίου $R$. Αν το $R$ είναι σώμα ο ορισμός παραμένει ίδιος. Εύλογα ο αναγνώστης αναζητεί την μεταβλητή. Προς το παρόν δεν εμφανίζεται καμία μεταβλητή με την συνήθη έννοια του όρου. Στην πορεία θα φανεί πως συνδέεται η συνήθης έννοια της μεταβλητής με τα πολυώνυμα μίας μεταβλητής.

Συμβολίζουμε με $R[X]$ το σύνολο όλων των πολυωνύμων επί του $R$, μίας μεταβλητής, (για συντομία πολυώνυμα επί του $R$). Αν,

$$p = (r_0, r_1, \ldots, r_{\nu-1}, r_\nu, 0, 0, \ldots, 0, \ldots),$$

$$q = (q_0, q_1, \ldots, q_{\mu-1}, q_\mu, 0, 0, \ldots, 0, \ldots),$$

ορίζουμε στο $R[X]$ τις πράξεις «πρόσθεσης» $\oplus$ και πολλαπλασιασμού $\odot$ ως εξής, (την πρόσθεση του $R$ θα συμβολίζουμε με το σύνηθες $+$ και τον πολλαπλασιασμό με το σύνηθες κενό),

$$
\begin{aligned}
p \oplus q &= (a_0, a_1, \ldots, a_k, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \text{ με },\\
& k = \max\{\nu, \mu\}\\
& a_i = r_i + q_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, \min\{\nu, \mu\}\\
& a_i = r_i,\ i = \min\{\nu, \mu\} + 1, \ldots, \nu,\ \text{αν } \nu > \mu,\\
& a_i = q_i,\ i = \min\{\nu, \mu\} + 1, \ldots, \mu,\ \text{αν } \mu > \nu,\\
p \odot q &= (b_0, b_1, \ldots, b_{\nu+\mu}, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \text{ με },\\
& b_i = \Sigma_{s=0}^{i} r_s\, q_{i-s} \text{ και },\\
& r_s = 0 \text{ αν } s > \nu,\ q_{i-s} = 0 \text{ αν } i - s > \mu.
\end{aligned}
$$

Είναι άμεση συνέπεια του ορισμού των πράξεων ότι το $R[X]$ είναι μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα όπου τα πολυώνυμα,

$$0 = (0, 0, \dots, 0, \dots),$$
$$1 = (1, 0, \dots, 0, \dots),$$

είναι το προσθετικό και πολλαπλασιαστικό ουδέτερο αντιστοίχως. Για απλότητα θα συμβολίζουμε την $\oplus$ με το σύνηθες $+$ και τον $\odot$ με το σύνηθες κενό.

Η ακολουθία $(r_0, 0, \dots, 0, \dots)$ με $r_0 \in R - \{0\}$ λέγεται σταθερό πολυώνυμο και έχει βαθμό μηδέν. Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{R}$ το σύνολο των σταθερών πολυωνύμων μαζί με το μηδενικό πολυώνυμο και ορίσουμε την συνάρτηση $f : R \mapsto \mathcal{R}$ με τύπο,

$$f(r) = (r, 0, 0, \dots, 0, \dots),$$

η $f$ είναι ισομορφισμός δακτυλίων δηλαδή, η $f$ είναι 1-1, επί και $f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2)$, $f(r_1 r_2) = f(r_1)\, f(r_2)$, $\forall\, r_1, r_2 \in R$.

Και αυτό το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του ορισμού των πράξεων των $R$ και $\mathcal{R}$ και του ορισμού της $f$. Αυτό μας επιτρέπει να «ταυτίζουμε» τα στοιχεία του $R$ με τα στοιχεία του $\mathcal{R}$ γιατί η αλγεβρική συμπεριφορά των στοιχείων του $R$ μεταφέρεται μέσω του ισομορφισμού $f$ ακριβώς αυτούσια στα αντίστοιχα στοιχεία του $\mathcal{R}$ και αντιστρόφως.

Ορίζουμε, $X = (0, 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ το πολυώνυμο επί του $R$ που ο δεύτερος όρος της ακολουθίας που του αντιστοιχεί είναι το $1 \in R$. Είναι άμεση συνέπεια του πολλαπλασιασμού πολυωνύμων ότι,

$$\begin{aligned}
X^2 = X\,X \; &= (0, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots),\\
X^3 = X^2\,X \; &= (0, 0, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots),\\
\vdots \quad \vdots \quad &\vdots\\
X^\nu = X^{\nu-1}\,X \; &= (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\nu\text{-όροι}}, 1, 0, 0, \ldots).
\end{aligned}$$

Επίσης ορίζουμε, $X^0 = (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Έχουμε,

$$\begin{aligned}
(r, 0, \ldots, 0, \ldots)\, X &= (0, r, 0, \ldots, 0, \ldots) \\
(r, 0, \ldots, 0, \ldots)\, X^2 &= (0, 0, r, 0, \ldots, 0, \ldots), \\
(r, 0, \ldots, 0, \ldots)\, X^3 &= (0, 0, 0, r, 0, \ldots, 0, \ldots), \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
(r, 0, \ldots, 0, \ldots)\, X^\nu &= (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\nu\text{-όροι}}, r, 0, 0, \ldots).
\end{aligned}$$

Από την προαναφερθείσα αλγεβρική ταύτιση των $R$ και $\mathcal{R}$ μπορούμε να υιοθετήσουμε τον συμβολισμό,

$$r\, X^\nu \equiv (r, 0, \ldots, 0, \ldots)\, X^\nu = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\nu\text{-όροι}}, r, 0, 0, \ldots).$$

Επίσης είναι άμεση συνέπεια του ορισμού των πράξεων του $R[X]$ ότι, για $(r_i, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in \mathcal{R} \subset R[X]$, $i = 0, 1, \ldots, \nu$,

$$
\begin{aligned}
(r_0, r_1, \ldots, r_\nu, 0, 0, \ldots) &= \quad (r_0, 0, \ldots, 0, \ldots) + \\
&\quad +(0, r_1, 0, \ldots, 0, \ldots) + \cdots + \\
&\quad +(0, \ldots, 0, r_\nu, 0, \ldots) = \\
&= \quad (r_0, 0, \ldots, 0, \ldots)\, X^0 + \\
&\quad +(r_1, 0, \ldots, 0, \ldots)\, X + \\
&\quad +(r_2, 0, \ldots, 0, \ldots)\, X^2 + \cdots + \\
&\quad +(r_\nu, 0, \ldots, 0, \ldots)\, X^\nu \equiv \\
&\equiv r_0\, X^0 + r_1\, X + r_2\, X^2 + \cdots + r_\nu\, X^\nu = \\
&= \Sigma_{i=0}^{\nu}\, r_i\, X^i.
\end{aligned}
$$

Δηλαδή, μετά τα όσα προηγήθησαν, μπορούμε να συμβολίζουμε ένα πολυώνυμο $(r_0, r_1, \ldots, r_\nu, 0, 0, \ldots)$ επί του $R$, (μίας μεταβλητής και βαθμού $\nu$), ως $\Sigma_{i=0}^{\nu}\, r_i\, X^i$.

Όμως **ΠΡΟΣΟΧΗ**. Όσο και αν ο προηγούμενος συμβολισμός μοιάζει με τον συνήθη συμβολισμό των πολυωνύμων που διδάσκεται στο Λύκειο, δεν είναι ακόμη συμβατός με αυτόν γιατί το $X$ δεν είναι μεταβλητή αλλά απλώς ένα συγκεκριμένο πολυώνυμο το $(0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Έστω $F$ ένα σώμα με απείρου πλήθους στοιχεία, $x$ μεταβλητή επί του $F$, $a_i \in F$. Το θεώρημα GIRARD–KRONECKER το οποίο είναι επέκταση του γνωστού μας Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας λέει ότι,

Υπάρχει σώμα $L$ με $F \subseteq L$ ώστε το $L$ να περιέχει όλες τις ρίζες της εξίσωσης $\Sigma_{i=0}^{\nu} a_i x^i = 0$ οι οποίες είναι $\nu$ το πλήθος λαμβάνοντας υπ' όψιν το πλήθος εμφανίσεων τους. Το 0 είναι το προσθετικό ουδέτερο του σώματος $F$.

Έστω $F$ ένα σώμα, $x$ μεταβλητή επί του $F$, $F[X]$ ο δακτύλιος πολυωνύμων επί του $F$,

$$F[x] = \{\Sigma_{i=0}^{\nu} a_i\, x^i \;:\; a_i \in F, \nu \in \mathbb{N}\}.$$

Για κάθε $f(x) = \Sigma_{i=0}^{\nu} a_i\, x^i$, $g(x) = \Sigma_{i=0}^{\mu} \beta_i\, x^i \in F[x]$ ορίζουμε,

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \Sigma_{i=0}^{\max\{\nu,\mu\}} (a_i + \beta_i)\, x^i, \\ f(x)\, g(x) &= \Sigma_{i=0}^{\nu+\mu} \left[\Sigma_{j=0}^{i} a_{i-j}\, \beta_j\right] x^i. \end{aligned}$$

Από τους πιο πάνω ορισμούς προκύπτει ότι και ο $F[x]$ είναι μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Ορίζουμε την συνάρτηση $\sigma : F[X] \mapsto F[x]$ με $\sigma\left(\Sigma_{i=0}^{\nu} a_i\, X^i\right) = \Sigma_{i=0}^{\nu} a_i\, x^i$. Θα δείξουμε ότι,

Η $\sigma$ είναι ένας ισομορφισμός δακτυλίων και έτσι αυτό μας επιτρέπει να «ταυτίζουμε» τα στοιχεία του $F[X]$ με τα στοιχεία του $F[x]$ γιατί η αλγεβρική συμπεριφορά των στοιχείων του $F[X]$ μεταφέρεται μέσω του ισομορφισμού $\sigma$ ακριβώς αυτούσια στα αντίστοιχα στοιχεία του

$F[x]$ και αντιστρόφως.

Από τον ορισμό της $\sigma$ προκύπτει αμέσως ότι είναι επί του $F[x]$. Από τον ορισμό των πράξεων των $F[X]$ και $F[x]$ προκύπτει ότι,

$$\sigma\left(\Sigma_{i=0}^{\nu} a_i X^i + \Sigma_{i=0}^{\mu} \beta_i X^i\right) = \sigma\left(\Sigma_{i=0}^{\nu} a_i x^i\right) + \sigma\left(\Sigma_{i=0}^{\mu} \beta_i x^i\right),$$
$$\sigma\left(\left(\Sigma_{i=0}^{\nu} a_i X^i\right)\left(\Sigma_{i=0}^{\mu} \beta_i X^i\right)\right) = \sigma\left(\Sigma_{i=0}^{\nu} a_i x^i\right)\,\sigma\left(\Sigma_{i=0}^{\mu} \beta_i x^i\right).$$

Αν τα πολυώνυμα $\Sigma_{i=0}^{\nu} a_i X^i$, $\Sigma_{i=0}^{\mu} \beta_i X^i$ είναι διαφορετικά τότε τουλάχιστον ένας συντελεστής του ενός είναι διαφορετικός από τουλάχιστον ένα συντελεστή του άλλου. Οι εικόνες τους $\Sigma_{i=0}^{\nu} a_i x^i$, $\Sigma_{i=0}^{\mu} \beta_i x^i$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους και η $\sigma$ είναι 1-1.
Έστω τώρα ότι το σώμα $F$ έχει απείρου πλήθους στοιχεία. Όπως είδαμε μπορούμε να αντιπροσωπεύσουμε τα πολυώνυμα του $F[X]$ με στοιχεία του $F[x]$ που και αυτά με τη σειρά τους τα λέμε πολυώνυμα.

Αν δύο διαφορετικά στοιχεία του $F[x]$ έστω τα $f(x) = \Sigma_{i=0}^{\nu} a_i\, x^i$, $g(x) = \Sigma_{i=0}^{\mu} \beta_i\, x^i$ αντιστοιχούσαν στην ίδια συνάρτηση, όπως έγινε στο σχετικό παράδειγμα με τον $\mathbb{Z}_3[X]$, τότε $f(k) = g(k)$ για κάθε $k \in F$ και η εξίσωση,

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \Sigma_{i=0}^{\max\{\nu,\mu\}} (a_i - \beta_i)\, x^i = 0,$$

έχει άπειρες το πλήθος λύσεις άτοπο από το θεώρημα GIRARD–KRONECKER.
Γι΄ αυτό στο Λύκειο ταυτίζουμε τα πολυώνυμα επί του $\mathbb{Q}$ ή του $\mathbb{R}$ με τις συναρτήσεις που έχουν τύπο $f(x) = \Sigma_{i=0}^{\nu} a_i\, x^i$. Τα σώματα με τα οποία δουλεύουμε στο Λύκειο έχουν απείρου πλήθους στοιχεία.
Επιστρέφουμε τώρα στην προσέγγιση της έννοιας του πολυωνύμου έτσι όπως αυτή παρουσιάζεται στο σχολικό βιβλίο Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου και παραθέσαμε στην αρχή του παρόντος κειμένου.

Αν όπως λέει το βιβλίο η ακέραιη αλγεβρική παράσταση,

$$4\,x^3 + x^2 - 3\,x^3 + 2\,x - x^3 + 6,$$

είναι ήδη πολυώνυμο του $\mathbb{Z}[x]$ οπότε του $\mathbb{R}[x]$ αφού $\mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{R}[x]$, (που απλώς μπορεί να γίνει απλούστερο μέσω αναγωγής ομοίων όρων), τότε όπως είδαμε, (χωρίς υποχρεωτική αναγωγή ομοίων όρων αφού και σε αυτή την μορφή σύμφωνα με το βιβλίο είναι πολυώνυμο), αυτό θα πρέπει να αντιστοιχεί στο πολυώνυμο του $\mathbb{R}[X]$,

$$4\,X^3 + X^2 - 3\,X^3 + 2\,X - X^3 + 6 = 6 + 2\,X + X^2 + 4\,X^3 - 3\,X^3 - X^3,$$

το οποίο με τη σειρά του αντιστοιχεί στην ακολουθία,

$$(6, 2, 1, r_3, 0, 0, \ldots, 0, \ldots),$$

με $r_3$ ή $4$ ή $-3$ ή $-1$ άτοπο. Ο συντελεστής $r_3$ πρέπει να λαμβάνει μία
συγκεκριμένη τιμή και άρα είναι υποχρεωτικό πρώτα να γίνει αναγωγή

ομοίων όρων ώστε να προκύψει μία ακριβώς τιμή για το $r_3$ και μετά να μιλήσουμε για πολυώνυμο.

Άρα, για την Γ΄ Γυμνασίου πολυώνυμο είναι κάθε ακέραιη αλγεβρική παράσταση που δεν έχει όμοια μονώνυμα.