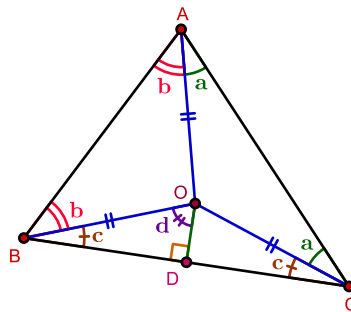


ΗΛΙΑΣ ΛΑΜΠΑΚΗΣ-4ο Γυμνάσιο Πύργου

ΠΟΥ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΤΟ ΠΕΡΙΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ;

Θα δώσουμε μια απόδειξη της πρότασης: Το περίκεντρο οξυγώνιου τριγώνου βρίσκεται στο εσωτερικό του ενώ, το περίκεντρο αμβλυγώνιου τριγώνου βρίσκεται εκτός αυτού.

α). Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει σημείο O στο εσωτερικό του τριγώνου ABC τέτοιο ώστε $OA = OB = OC$. Τότε, τα τρίγωνα OAB , OBC , OCA είναι ισοσκελή και,



$$\hat{a} = 90^\circ - \frac{\widehat{AOC}}{2}, \quad \hat{b} = 90^\circ - \frac{\widehat{AOB}}{2}$$

$$\hat{A} = \hat{a} + \hat{b} = 180^\circ - \frac{\widehat{AOC} + \widehat{AOB}}{2} =$$

$$= 180^\circ - \frac{360^\circ - \widehat{BOC}}{2} = \frac{\widehat{BOC}}{2} = \widehat{BOD} < 90^\circ,$$

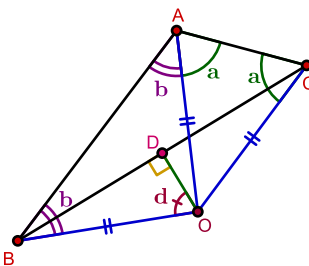
αφού το τρίγωνο OBC είναι ισοσκελές και η διχοτόμος OD της \widehat{BOC} είναι μεσοκάθετος της BC . Με αντίστοιχη λογική μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\hat{B} < 90^\circ$ και $\hat{C} < 90^\circ$.

Δείξαμε ότι, αν υπάρχει σημείο στο εσωτερικό ενός τριγώνου που ισαπέχει από τις κορυφές του, το τρίγωνο θα είναι οξυγώνιο.

β). Αν σημείο επί της πλευράς τριγώνου και μεταξύ των άκρων αυτής ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου τότε, η πλευρά αυτή είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και η γωνία του τριγώνου απέναντι της πλευράς αυτής είναι ορθή.

Δείξαμε ότι, αν υπάρχει σημείο επί μίας πλευράς τριγώνου που ισαπέχει από τις κορυφές του, το τρίγωνο θα είναι ορθογώνιο.

γ). Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει σημείο O εκτός του τριγώνου ABC τέτοιο ώστε $OA = OB = OC$. Τότε, τα τρίγωνα OAB , OBC , OCA είναι ισοσκελή και,



$$\hat{A} = \hat{a} + \hat{b} = 180^\circ - \frac{\widehat{AOC} + \widehat{AOB}}{2} =$$

$$= 180^\circ - \frac{\widehat{BOC}}{2} = 180^\circ - \widehat{BOD} > 90^\circ,$$

αφού το τρίγωνο OBC είναι ισοσκελές, και η διχοτόμος OD της γωνίας \widehat{BOC} είναι μεσοκάθετος της BC οπότε, $\widehat{BOD} < 90^\circ$.

Δείξαμε ότι, αν υπάρχει σημείο εκτός τριγώνου που ισαπέχει από

τις κορυφές του, το τρίγωνο θα είναι αμβλυγώνιο.

Τώρα μένει να δείξουμε και τα αντίστροφα. Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο. Το περίκεντρό του είναι σημείο που ισαπέχει από τις κορυφές του. Αν βρίσκεται επί μίας πλευράς του ή εκτός του τριγώνου τότε, από τις περιπτώσεις (β, γ) το τρίγωνο είναι είτε ορθογώνιο είτε αμβλυγώνιο, άτοπο. Άρα, το περίκεντρο οξυγώνιου τριγώνου βρίσκεται στο εσωτερικό του.

Ομοίως, αν το περίκεντρο αμβλυγώνιου τριγώνου, (που είναι σημείο που ισαπέχει από τις κορυφές του), βρίσκεται στο εσωτερικό του ή επί μίας πλευράς του τότε, από τις περιπτώσεις (α, β) αυτό θα είναι είτε οξυγώνιο είτε ορθογώνιο, άτοπο. Άρα, το περίκεντρο αμβλυγώνιου τριγώνου βρίσκεται στο εξωτερικό του.