ΜΕ ΑΦΟΡΜΗ ΤΟΝ ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΣΜΟ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ′ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΝΘΕΤΟ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ ΕΝΟΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ ΤΥΧΗΣ

Στην σελίδα 169 του σχολικού βιβλίου Μαθηματικών Γ′ Γυμνασίου, ενότητα Α.5.2, Δειγματικός χώρος–Ενδεχόμενα, διαβάζουμε τον εξής ορισμό για το σύνθετο ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης,

> *Γενικά*
>
> Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω.

Όπως θα δείξουμε στην συνέχεια ο ορισμός αυτός είναι λανθασμένος. Τα σύνθετα ενδεχόμενα, (ή για απλότητα ενδεχόμενα), είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης αλλά γενικώς, κάθε υποσύνολο του Ω δεν είναι υποχρεωτικώς ενδεχόμενο του Ω.

Ο ορισμός του σχολικού βιβλίου είναι σωστός στην περίπτωση που ο Ω είναι πεπερασμένο σύνολο. Γι′ αυτό το λόγο θα έπρεπε ο ορισμός του σχολικού βιβλίου να είχε διατυπωθεί ως:

Ορισμός: Όταν ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης είναι **πεπερασμένος** τότε, ενδεχόμενο του πειράματος τύχης είναι κάθε υποσύνολο του Ω.

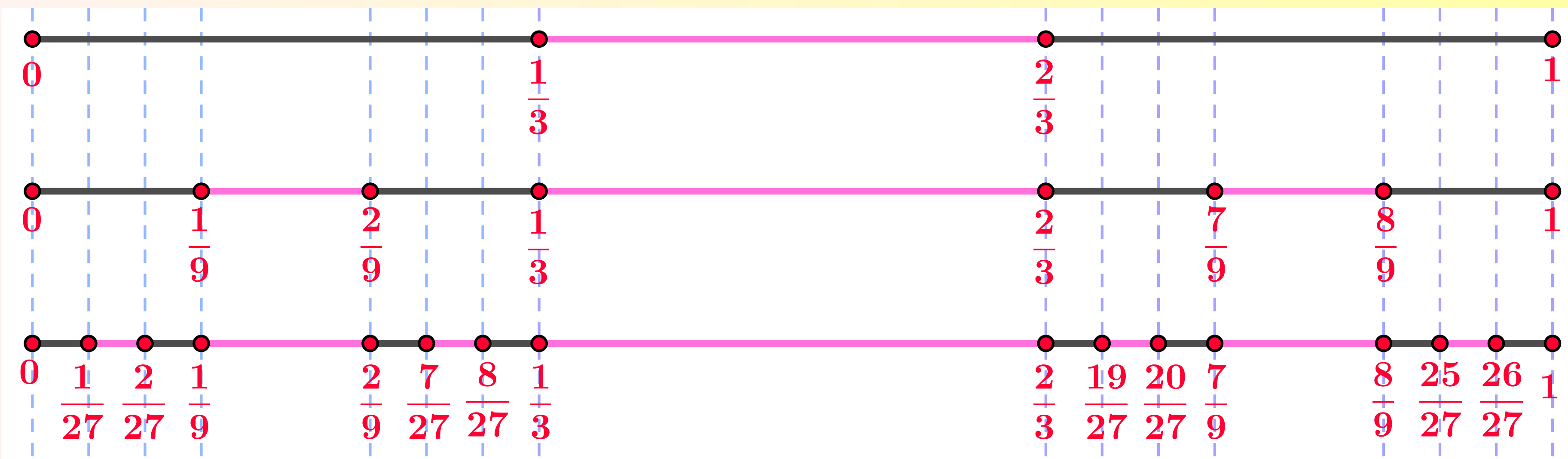
Γενικώς η πιθανότητα πραγματοποίησης ή μη ενός ενδεχομένου είναι ένας αριθμός που μετρά το πόσο βέβαιη ή αβέβαιη είναι η πραγματοποίηση αυτή. Π.χ. στην περίπτωση των πεπερασμένων δειγματικών χώρων με ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι φυσιολογικό να επιλέξουμε τον λόγο $N(A)/N(\Omega)$ ως τον αριθμό που μετρά το πόσο βέβαιο ή αβέβαιο είναι να πραγματοποιηθεί ένα υποσύνολο A του Ω.

Στην περίπτωση όμως μη πεπερασμένων δειγματικών χώρων, η προαναφερθείσα λογική επιλογής μέτρου για τον βαθμό βεβαιότητας ή αβεβαιότητας πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου, δεν είναι λειτουργική. Π.χ. επιλέγουμε στην τύχη έναν αριθμό από το σύνολο αριθμών $[0,1]$. Ποία η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου: $A = \{\text{ο επιλεγής αριθμός είναι ρητός}\}$. Εδώ $\Omega = [0,1]$, $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Τί νόημα έχει ο λόγος $N(A)/N([0,1])$; Αν θεωρήσουμε το ενδεχόμενο:
$B = \{\text{ο επιλεγής αριθμός ανήκει στο } [1/3, 1/2]\}$ επίσης ο λόγος $N([1/3,1/2])/N([0,1])$ δεν οδηγεί σε καθαρό Μαθηματικό νόημα. Αυτό γιατί σε αντίθεση με την πεπερασμένη περίπτωση, τώρα, το πλήθος των ευνοϊκών και το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι «άπειρο». Αν όμως επιλέγαμε ως πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου B τον λόγο (μήκος του$[1/3,1/2]$/μήκος του$[0,1]$) $=$ $((1/2)-(1/3))/1 = 1/6$ ο αριθμός αυτός εμπεριέχει το νόημα που θέλουμε να εκφράζει την βαρύτητα του «μεγέθους» του ευνοϊκού ενδεχομένου ως προς το «μέγεθος» του δειγματικού χώρου.

Θέλουμε με κάποιο τρόπο να μετράμε την «βαρύτητα» του «μεγέθους» του προς πραγματοποίηση ενδεχομένου σε σχέση με το «μέγεθος» του δειγματικού χώρου.

Στην πεπερασμένη περίπτωση το «μέγεθος» ενός συνόλου μπορούσε να εκφρασθεί μέσω του πλήθους των στοιχείων του. Στην μη πεπερασμένη περίπτωση όμως, χρειάζεται μία επέκταση της έννοιας «μέγεθος» συνόλου. Π.χ. στο μη πεπερασμένο παράδειγμα που αναφέραμε πιο πάνω το «μέγεθος» των συνόλων εκφράσθηκε μέσω του μήκους διαστήματος.

Ένα άλλο παράδειγμα που δίνουμε σε σχέση με την έννοια του «μεγέθους» συνόλου χρησιμοποιεί το σύνολο Cantor το οποίο κατασκευάζεται μέσω της ακόλουθης διαδικασίας: Θεωρούμε, (βλέπε Κουμουλής Γ. και Νεγρεπόντης Σ., «Θεωρία Μέτρου», εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1988), το διάστημα πραγματικών αριθμών $I_0 = [0, 1]$ και το διαιρούμε σε τρία ισομήκη υποδιαστήματα όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Κάθε ένα των υποδιαστημάτων έχει μήκος το $1/3$ του μήκους του διαιρούμενου διαστήματος I_0. Θέτουμε $I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $I_2 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, $C_0 = I_0$ και $C_1 = I_1 \cup I_2$. Κατόπιν διαιρούμε τα διαστήματα I_1, I_2 σε τρία ισομήκη υποδιαστήματα έκαστο αντιστοίχως. Κάθε ένα των υποδιαστημάτων αυτών έχει μήκος το $1/3$ του μήκους του διαιρούμενου διαστήματος I_1, I_2 αντιστοίχως. Θέτουμε $I_3 = \left[0, \frac{1}{9}\right]$, $I_4 = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, $I_5 = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$, $I_6 = \left[\frac{8}{9}, 1\right]$, $C_2 = \cup_{m=3}^{6} I_m$. Συνεχίζοντας την προαναφερθείσα διαδικασία, κατασκευάζουμε τους όρους $\{C_n\}_{n=0}^{+\infty}$ μίας ακολουθίας υποδιαστημάτων του $[0,1]$ έτσι ώστε, ο όρος C_n να προκύπτει ως ένωση των 2^n το πλήθος διαστημάτων που απομένουν όταν έκαστο των 2^{n-1} διαστημάτων που συγκρότησαν τον όρο C_{n-1} διαιρεθεί σε τρία ισομήκη υποδιαστήματα και αφαιρεθεί το ανοιχτό ενδιάμεσο εξ΄ αυτών υποδιάστημα.
Ως σύνολο Cantor ορίζεται το σύνολο $\mathcal{C} = \cap_{n=0}^{+\infty} C_n$. Το μήκος μ_n του όρου C_n ισούται με το άθροισμα των μηκών των 2^n το πλήθος διαστημάτων I_m μήκους $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ έκαστο που τον συγκροτούν και είναι $2^n\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Το μήκος $\mu_{\mathcal{C}}$ του $\mathcal{C}$ ισούται με $\lim_{n\to+\infty} \mu_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. (Οι όροι της ακολουθίας $\{C_n\}_{n=0}^{+\infty}$ τείνουν στο $\mathcal{C}$ άρα και τα μήκη των όρων της $\{C_n\}_{n=0}^{+\infty}$ τείνουν στο μήκος του $\mathcal{C}$. Αποδεικνύεται, (βλέπε Κουμουλής Γ. και Νεγρεπόντης Σ., «Θεωρία Μέτρου», Πρόταση 4.11, εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1988), ότι το $\mathcal{C}$ είναι υπεραριθμήσιμο δηλαδή, έχει το πλήθος του συνεχούς. Το $\mathcal{C}$ δεν είναι κενό.

Έστω τώρα το πείραμα τύχης «επιλέγουμε στην τύχη ένα σημείο με τετμημένη στο διάστημα $[0,1]$ ». Ο δειγματικός χώρος $\Omega = [0,1]$. Ποια η πιθανότητα το επιλεγέν σημείο να έχει τετμημένη στο $\mathcal{C}$; Το προς πραγματοποίηση ενδεχόμενο που αντιστοιχεί στην προηγούμενη ερώτηση είναι το $\mathcal{C}$ υποσύνολο του Ω. Πρόκειται για γεωμετρική πιθανότητα και σύμφωνα με τον ορισμό της γεωμετρικής πιθανότητας, (βλέπε Κουνιάς Σ. και Μωυσιάδης Χ. «Θεωρία Πιθανοτήτων Ι», εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1995), $P(\mathcal{C}) = \frac{\text{μήκος } \mathcal{C}}{\text{μήκος } \Omega} = \frac{0}{1} = 0$. Δηλαδή, το «μέγεθος» του $\mathcal{C}$ έχει πρακτικώς ανύπαρκτη βαρύτητα σε σχέση με το μέγεθος του $\Omega = [0, 1]$.

Χρειαζόμαστε λοιπόν μία συνάρτηση, που θα αντιστοιχεί στα σύνολα έναν αριθμό, που θα εκφράζει το «μέγεθος» του συνόλου. Η ύπαρξη και η μελέτη τέτοιων συναρτήσεων είναι αντικείμενο του κλάδου των Μαθηματικών που ονομάζεται Θεωρία Μέτρου.

Μία επίσης πολύ σημαντική έννοια της Μαθηματικής Λογικής είναι το Αξίωμα της Επιλογής. Αυτό συναντάται στην βιβλιογραφία σε διάφορες ισοδύναμες διατυπώσεις όπως,

Αξίωμα Επιλογής: Για κάθε σύνολο υπάρχει «τρόπος» να επιλέξουμε ένα στοιχείο από κάθε μη κενό υποσύνολό του.

Αποδεχόμενοι το Αξίωμα της Επιλογής, (που είναι ουσιώδες σε πλήθος εφαρμογών της Μαθηματικής Λογικής), αποδεικνύεται, (βλέπε Κουμουλής Γ. και Νεγρεπόντης Σ., «Θεωρία Μέτρου», Πρόταση 4.12, εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1988), ότι υπάρχει υποσύνολο του $[0, 1]$, (το λεγόμενο σύνολο Vitali για το οποίο δεν μπορεί να ορισθεί τρόπος να μετρήσουμε το «μέγεθός» του ούτως ώστε, να καταλήξουμε σε έναν υπολογισμό πιθανότητας για το πόσο βέβαιο ή αβέβαιο είναι αν επιλέξουμε στην τύχη έναν αριθμό από το $[0, 1]$ αυτός να ανήκει στο σύνολο Vitali.

Τα ποιο πάνω μας οδηγούν στο να επαναλάβουμε ότι στον ορισμό του σχολικού βιβλίου Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου πρέπει να τονισθεί ρητώς ότι αφορά πεπερασμένους δειγματικούς χώρους.