ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

Ηλίας Λαμπάκης

Τα πιο κάτω προβλήματα προτείνονται προς επίλυση. Έχουν όλα δημιουργηθεί από τον Ηλία Λαμπάκη–4ο Γυμνάσιο Πύργου. Τα περισσότερα αφορούν τον κλάδο των Αλγεβρικών και Γεωμετρικών Ανισοτήτων.

Στα περισσότερα προβλήματα γίνεται χρήση του Λατινικού αλφάβητου ως προς τον μαθηματικό συμβολισμό διότι αυτό διευκόλυνε σε σχέση με τον επεξεργαστή μαθηματικού κειμένου που χρησιμοποιήθηκε.

Πρόβλημα 1. Να βρεθούν όλα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ για τα οποία ισχύει

$$\text{ημ}(\hat{A}) + \text{ημ}(\hat{B}) + \text{ημ}(\hat{\Gamma}) = 1.$$

Πρόβλημα 2. Έστω $k, \ell, m \in \mathbb{R} - \{0\}$, $k \neq \ell \neq m$. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{k^2}{(\ell - m)^2} + \frac{\ell^2}{(m-k)^2} + \frac{m^2}{(k-\ell)^2} > 2$$

Πρόβλημα 3. Έστω x, y, z, w θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να δείξετε ότι,

$$\sqrt[3]{\frac{x\,y}{w^2}} + \sqrt[3]{\frac{y\,z}{x^2}} + \sqrt[3]{\frac{z\,w}{y^2}} + \sqrt[3]{\frac{w\,x}{z^2}} > 3$$

Πρόβλημα 4. Έστω $p \equiv 2 \pmod 3$ πρώτος, $\mathbb{F}_p$ το αντίστοιχο σώμα με p στοιχεία. Να βρείτε το πλήθος των ζευγών $(\bar{x}, \bar{y})$ έτσι ώστε $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{F}_p$ και $\bar{y}^2 = \bar{x}^3 + \bar{1}$.

Πρόβλημα 5. Έστω a, β, γ οι πλευρές, $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ οι γωνίες τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι,

$$2\,a\ \text{συν}\,\hat{A} + 2\,\beta\ \text{συν}\,\hat{B} + 2\,\gamma\ \text{συν}\,\hat{\Gamma} \leq 3\,\sqrt[3]{a\,\beta\,\gamma}.$$

Πρόβλημα 6. Έστω a, b, c οι πλευρές, h_a, h_b, h_c τα ύψη, r_a, r_b, r_c οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ABC. Επίσης, $S = \{a, b, c\}$. Να αποδείξετε ότι,

$$\sum_{i \in S} \frac{1}{h_i\, r_i} \geq \sum_{\substack{i,j,k \in S \\ i \neq j \neq k}} \left(\frac{4\, h_i}{3\, j\, k} \right)^2 .$$

Πρόβλημα 7. Έστω $\lfloor a \rfloor$ το ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού a. Να βρείτε το,

$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=0}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \left(2 \left\lfloor \sqrt{n - k^2} \right\rfloor + 1 \right) \right\}$$

Πρόβλημα 8. Έστω $i, j, k \in \Delta = \{0, 1, 2\}$, $d \in \mathbb{Q} - \{0\}$, r_i οι ρίζες του $p(x) = x^3 + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0 \in \mathbb{Q}[x]$, $\prod_{i<j} (r_i - r_j) = d^3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ρητοί αριθμοί ρ_{ijk} τέτοιοι ώστε για κάθε $(i, j) \in \Delta \times \Delta$ να ισχύει,

$$r_i = \sum_{k=0}^{2} \rho_{ijk}\, r_j^k\, .$$

Πρόβλημα 9. Έστω $n \geq 2$ φυσικός αριθμός, a_i θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε, $a_0 \geq a_1 \geq \ldots \geq a_{n-2} \geq a_{n-1} > 0$ και $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = 1$. Να δείξετε ότι,

$$\frac{a_0^n + a_1^n}{(a_0 + a_1)^{n-1}} + \frac{a_1^n + a_2^n}{(a_1 + a_2)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-2}^n + a_{n-1}^n}{(a_{n-2} + a_{n-1})^{n-1}} + \frac{a_{n-1}^n + a_0^n}{(a_{n-1} + a_0)^{n-1}} \geq \frac{1}{2^{n-2}}$$

Πρόβλημα 10. Έστω H το ορθόκεντρο, R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, h_a, h_b, h_c τα ύψη, ενός οξυγωνίου τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$h_a\,(HA - R) + h_b\,(HB - R) + h_c\,(HC - R) \geq 0.$$

Πρόβλημα 11. Έστω $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R} - \{0\}$, $a + b + c = 0$. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{a^6}{b\,c} + \frac{b^6}{c\,a} + \frac{c^6}{a\,b} > 0.$$

Πρόβλημα 12. Για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και $u \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι,

$$\text{συν}^{2n+4}(u) + \text{ημ}^{2n+4}(u) \leq \text{συν}^2(2\,u) + \frac{1}{2^{n+1}}\ \text{ημ}^2(2\,u).$$

Πρόβλημα 13. Έστω $x, y, z \in (-\pi/4\,,\, \pi/4)$. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{1}{\text{συν}(2\,x)} + \frac{1}{\text{συν}(2\,y)} + \frac{1}{\text{συν}(2\,z)} \geq \frac{\text{συν}(x-y)}{\text{συν}(x+y)} + \frac{\text{συν}(y-z)}{\text{συν}(y+z)} + \frac{\text{συν}(z-x)}{\text{συν}(z+x)}\,.$$

Πρόβλημα 14. Έστω $a \geq 1$, $b \geq 1$, $c \geq 1$ οι πλευρές, R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$a^2\,b^2 + b^2\,c^2 + c^2\,a^2 \geq 108\,R^2\,r^2.$$

Πρόβλημα 15. Έστω a, b, c οι πλευρές, $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ οι γωνίες, r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\left(a^2 + b^2\right)\ \text{ημ}^2(\hat{C}) + \left(b^2 + c^2\right)\ \text{ημ}^2(\hat{A}) + \left(c^2 + a^2\right)\ \text{ημ}^2(\hat{B}) \geq 54\,r^2.$$

Πρόβλημα 16. Έστω a, b, c οι πλευρές, R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{1}{a^2\,b^2} + \frac{1}{b^2\,c^2} + \frac{1}{c^2\,a^2} > \frac{1}{3\,R^4}\,.$$

Πρόβλημα 17. Έστω R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, r_a, r_b, r_c οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{7\,R + 4\,r}{4} \leq \frac{r_a\,(r_a - r)}{(r_a + r)} + \frac{r_b\,(r_b - r)}{(r_b + r)} + \frac{r_c\,(r_c - r)}{(r_c + r)}\,.$$

Πρόβλημα 18. Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a > b > c > 0$. Να αποδείξετε ότι,

$$\left(1 - \frac{c}{b}\right)^b \left(\frac{a}{c} - 1\right)^c > \left(1 - \frac{c}{a}\right)^a \left(\frac{b}{c} - 1\right)^c.$$

Πρόβλημα 19. Έστω $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $t_n \in [0,1]$, f πραγματική συνάρτηση συνεχής στο $[0,1]$ και,

$$F_1(t_1) = \int_0^{t_1} f(u)\, du\,,\ F_n(t_n) = \int_0^{t_n} F_{n-1}(t_{n-1})\, dt_{n-1}\,,\ n = 2, 3, \dots\,.$$

Επιλέγουμε την f τέτοια ώστε $F_n(1) = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Να αποδείξετε ότι,

$$\left|\int_0^1 \left(\int_0^{t_{2n}} \frac{f(u)\,(t_{2n} - u)^{2n-1}}{(2\,n-1)!}\, du\right) dt_{2\,n}\right| \le \frac{(n!)^2 \max\limits_{t_{2n}\in[0,1]}\{|f(t_{2n})|\}}{(2\,n)!\,(2\,n+1)!}\,.$$

Πρόβλημα 20. Αν $x_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, 6$ να επιλύσετε το σύστημα,

$$\begin{aligned}
-2\,x_1\,x_2\,x_3 + x_1\,x_2\,x_4 + x_1\,x_3\,x_5 + x_2\,x_3\,x_6 &= 0,\\
-3\,x_1^2\,x_2^2\,x_3^2 + x_1^2\,x_2^2\,x_4 + x_1^2\,x_3^2\,x_5 + x_2^2\,x_3^2\,x_6 &= 0,\\
2\,x_1^3\,x_2^3\,x_3^3 + x_1^3\,x_2^3\,x_4 + x_1^3\,x_3^3\,x_5 + x_2^3\,x_3^3\,x_6 &= 0,\\
-31\,x_1^4\,x_2^4\,x_3^4 + x_1^4\,x_2^4\,x_4 + x_1^4\,x_3^4\,x_5 + x_2^4\,x_3^4\,x_6 &= 0,\\
54\,x_1^5\,x_2^5\,x_3^5 + x_1^5\,x_2^5\,x_4 + x_1^5\,x_3^5\,x_5 + x_2^5\,x_3^5\,x_6 &= 0,\\
1 + x_4 + x_5 + x_6 &= 0.
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 21. Για όλους τους διακεκριμένους πραγματικούς αριθμούς x, y, z να αποδείξετε ότι,

$$\sum_{cyc(x,y,z)} (x\,y - x\,z)^8\,(x\,z - y\,z)\,(y\,z - x\,y) > 0,$$

όπου το άθροισμα λαμβάνετε επί των κυκλικών μεταθέσεων των x, y, z.

Πρόβλημα 22. Έστω s η ημιπερίμετρος, R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{2\,R}{s} + \frac{r}{2\,R} > 1.$$

Πρόβλημα 23. Έστω a, b, c οι πλευρές, $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ οι γωνίες ενός οξυγωνίου τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{a\ \text{συν}(\hat{B} - \hat{C})}{b\ \text{συν}(\hat{C} - \hat{A}) + a\ \ \text{συν}\,\hat{A}} + \frac{b\ \text{συν}(\hat{C} - \hat{A})}{c\ \text{συν}(\hat{A} - \hat{B}) + b\ \ \text{συν}\,\hat{B}} + \frac{c\ \text{συν}(\hat{A} - \hat{B})}{a\ \text{συν}(\hat{B} - \hat{C}) + c\ \ \text{συν}\,\hat{C}} \ge 2.$$

Πρόβλημα 24. Να βρείτε την βέλτιστη σταθερά k έτσι ώστε η ανισότητα,

$$\text{εφ}\,\frac{\hat{A}}{2}\ \text{εφ}\,\frac{\hat{B}}{2}\ \text{εφ}\,\frac{\hat{C}}{2} \le k\,,$$

να ισχύει για τις γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ κάθε τριγώνου ABC.

Πρόβλημα 25. Έστω a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{2\,a^2 - a\,b - b^2}{a+b} + \frac{2\,b^2 - b\,c - c^2}{b+c} + \frac{2\,c^2 - c\,a - a^2}{c+a} \ge \frac{a^2 + b^2 + c^2 - a\,b - b\,c - c\,a}{a+b+c}\,.$$

Πρόβλημα 26. Έστω $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ με $b > a \geq 0$. Να αποδείξετε ότι,

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n^k} \leq \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{b-a}{n^k}\right).$$

Πρόβλημα 27. Έστω a, b, c οι πλευρές, H το ορθόκεντρο ενός οξυγωνίου τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (HA + HB + HC)^2.$$

Πρόβλημα 28. Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο, AA', BB', CC' τα ύψη από τις κορυφές A, B, C αντιστοίχως, H το ορθόκεντρο, A'', B'', C'' σημεία επί των ευθειών AA', BB', CC' αντιστοίχως τέτοια ώστε $\widehat{BA''C} = \widehat{CB''A} = \widehat{AC''B} = 90^\circ$. Να αποδείξετε ότι,

$$HA'' + HB'' + HC'' < AA'' + BB'' + CC''.$$

Πρόβλημα 29. Για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y, z με $x\,y + y\,z + z\,x = 1$ να αποδείξετε ότι,

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6\,x\,y\,z \geq x + y + z.$$

Πρόβλημα 30. Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $x, y, z \in (1, +\infty)$ με $x + y + z = x\,y\,z$ να αποδείξετε ότι,

$$\sum_{cyc} (3\,x^5 - 10\,x^3 + 3\,x)\,(1 - 3\,z^2) \leq \prod_{cyc} (3\,x - x^3).$$

όπου το άθροισμα και γινόμενο λαμβάνετε επί των κυκλικών μεταθέσεων των x, y, z.

Πρόβλημα 31. Έστω $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ οι γωνίες τριγώνου ABC, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = 3/2$, $x_n\,(27 - 2\,x_{n-1}^2) = 3\,x_{n-1}^2$. Να αποδείξετε ότι,

$$\sum_{cyc} \left(\frac{\text{εφ}(\hat{A}/2)\ \text{εφ}(\hat{B}/2)}{1 + \text{συν}\,\hat{C}} \right)^{2^n} > 2^{2^n}\ 3^{-2^{n+1}}\ x_n,$$

όπου το άθροισμα λαμβάνετε επί των κυκλικών μεταθέσεων των $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$.

Πρόβλημα 32. Έστω a, b, c οι πλευρές, $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ οι γωνίες τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\sum_{cyc} c^{\text{συν}^2(\hat{C}/2)} \left(b^{\text{συν}^2(\hat{B}/2)}\, a^{\text{ημ}^2(\hat{A}/2)} - c \right) \geq 0,$$

όπου το άθροισμα λαμβάνετε επί των κυκλικών μεταθέσεων των ζευγών $\{(c, \hat{C}),$ $(b, \hat{B}), (a, \hat{A})\}$. Για παράδειγμα, $c \to b \to a \to c$ συνεπάγεται $\hat{C} \to \hat{B} \to \hat{A} \to \hat{C}$ και αντιστρόφως.

Πρόβλημα 33. Έστω a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} \geq \frac{a+b+c}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Πρόβλημα 34. Έστω a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι,

$$a^3 + b^3 + c^3 - a\,b\,c \geq \frac{2\,(a^2\,b^2 + b^2\,c^2 + c^2\,a^2)}{a + b + c}\,.$$

Πρόβλημα 35. Έστω $ABCD$ τετράπλευρο. Οι ημιευθείες $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$ συντρέχουν στο σημείο O_1. Οι ημιευθείες $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ συντρέχουν στο σημείο O_2. M, N είναι τα μέσα των διαγωνίων BD, AC αντιστοίχως. (O_1MN), (O_2MN) είναι τα εμβαδά των αντιστοίχων τριγώνων. Να αποδείξετε ότι $(O_1MN) = (O_2MN)$.

Πρόβλημα 36. Έστω $b > a > 0$, $ABCD$ είναι τετράγωνο πλευράς a, M, N σημεία στις ημιευθείες $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ αντιστοίχως έτσι ώστε το σημείο C να είναι μεταξύ των σημείων B, M και $CM = b - a$, το σημείο D είναι μεταξύ των σημείων C, N και $DN = b$. Επίσης, οι παράλληλες δια των σημείων M, N προς τα AN, AM αντιστοίχως τέμνονται στο σημείο Z και έστω O το μέσο του ZA. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ZOBC$.

Πρόβλημα 36. Έστω a, b, c οι πλευρές, h_a, h_b, h_c τα ύψη τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{h_b^2\,h_c^2}{a^4} + \frac{h_c^2\,h_a^2}{b^4} + \frac{h_a^2\,h_b^2}{c^4} \leq \frac{27}{16}\,.$$

Πρόβλημα 37. Έστω a, b, c οι πλευρές, $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ οι γωνίες οξυγωνίου τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\left(\prod_{cyc} \text{σφ}\,\hat{A}\right)\left(\sum_{cyc} \text{σφ}\,\hat{A}\right) < \sum_{cyc} \frac{\text{ημ}\,\hat{B} + \text{ημ}\,\hat{C}}{3\ \text{ημ}\,\hat{A}}\,,$$

όπου το γινόμενο και άθροισμα λαμβάνονται επί των κυκλικών μεταθέσεων των $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$.

Πρόβλημα 38. Να βρείτε τα τρίγωνα ABC με πλευρές a, b, c ημιπερίμετρο s και ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου r για τα οποία ισχύει η ανισότητα,

$$(s - a)\,\sqrt{s - c} + (s - b)\,\sqrt{s - a} + (s - c)\,\sqrt{s - b} \geq s\,\sqrt{r}\,,$$

Πρόβλημα 39. Έστω h_a, h_b, h_c τα ύψη, r_a, r_b, r_c οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων του τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} \geq \sqrt{\frac{r_a}{r_c}} + \sqrt{\frac{r_c}{r_b}} + \sqrt{\frac{r_b}{r_a}} \geq 2.$$

Πρόβλημα 40. Έστω a, b, c μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a + b + c = 0$. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{15}{2} + \frac{a^4}{b\,c} + \frac{b^4}{c\,a} + \frac{c^4}{a\,b} \geq 5\,(a - b + c).$$

Πρόβλημα 41. Έστω a, b, c, d οι πλευρές, s η ημιπερίμετρος τετραπλεύρου $ABCD$. Να αποδείξετε ότι,

$$\sum_{cyc} a\,b\,\left(s^2 + (s - a)\,(s - b)\right) \geq (a\,d + b\,c)\,(a\,b + c\,d) + 16\prod_{cyc}(s - a),$$

όπου τα $\sum_{cyc}$, $\prod_{cyc}$ λαμβάνονται επί των κυκλικών μεταθέσεων των a, b, c, d.

Πρόβλημα 42. Έστω $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, β_n ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\beta_1 = 10$, $\beta_n = 3\,\beta_{n-1}^2 - 2$, a, b, c οι πλευρές τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\beta_n \sum_{cyc} (a\,b)^{3\cdot 2^{n-1}} > \sum_{cyc} a^{3\cdot 2^n},$$

όπου το $\sum_{cyc}$ λαμβάνεται επί των κυκλικών μεταθέσεων των a, b, c, d.

Πρόβλημα 43. Έστω a, b, c οι πλευρές, H το ορθόκεντρο οξυγωνίου τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι το ABC είναι ισόπλευρο αν και μόνο αν,

$$\frac{HA}{HB} = \frac{3\,b\,c - (b+c)\,a}{3\,c\,a - (c+a)\,b} \text{ και } \frac{HB}{HC} = \frac{3\,c\,a - (c+a)\,b}{3\,a\,b - (a+b)\,c}.$$

Πρόβλημα 44. Έστω a, b, c οι πλευρές, $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ οι γωνίες οξυγωνίου τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \leq \frac{7}{8}\left(\prod_{cyc} \text{στεμ}\,\frac{\hat{A}}{2}\right) - 1,$$

όπου το $\prod_{cyc}$ λαμβάνεται επί των κυκλικών μεταθέσεων των $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$.

Πρόβλημα 45. Έστω $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ οι γωνίες μη αμβλυγωνίου τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\left(\text{συν}\,\hat{A} + \text{συν}\,\hat{B} + \text{συν}\,\hat{C}\right)^2 \leq \text{ημ}^2\,\hat{A} + \text{ημ}^2\,\hat{B} + \text{ημ}^2\,\hat{C}.$$

Πρόβλημα 46. Έστω h_a, h_b, h_c τα ύψη, r_a, r_b, r_c οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{r_a}{r_b} + \frac{r_b}{r_c} + \frac{r_c}{r_a} \geq \frac{h_b}{h_a} + \frac{h_a}{h_c} + \frac{h_c}{h_b}\,.$$

Πρόβλημα 47. Έστω r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, h_a, h_b, h_c τα ύψη, r_a, r_b, r_c οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{1}{r}\sum_{cyc} \sqrt{h_a} \geq \sum_{cyc} \frac{4\sqrt{r_a} - \sqrt{h_a}}{r_a}\,.$$

όπου το $\sum_{cyc}$ λαμβάνεται επί των κυκλικών μεταθέσεων των a, b, c.

Πρόβλημα 48. Έστω h_a, h_b, h_c τα ύψη, r_a, r_b, r_c οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\sum_{cyc} \frac{1}{r_a\,h_a} \leq \sum_{cyc} \frac{1}{h_a\,h_b}\,.$$

όπου το $\sum_{cyc}$ λαμβάνεται επί των κυκλικών μεταθέσεων των a, b, c.

Πρόβλημα 49. Έστω a, b, c οι πλευρές τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\sum_{cyc} \frac{a^4 + b^4}{a^2 + a\,b + b^2} < \frac{14}{3} \sum_{cyc} a\,b.$$

όπου το $\sum_{cyc}$ λαμβάνεται επί των κυκλικών μεταθέσεων των a, b, c.

Πρόβλημα 50. Έστω R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, h_a, h_b, h_c τα ύψη, r_a, r_b, r_c οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{\sum_{cyc} \sqrt{r_a\, r_b}}{\sum_{cyc} \sqrt{h_a\, h_b}} \leq \sqrt{\frac{R}{2\,r}}\,.$$

όπου το $\sum_{cyc}$ λαμβάνεται επί των κυκλικών μεταθέσεων των a, b, c.

Πρόβλημα 51. Έστω a, b, c οι πλευρές τριγώνου ABC. Ο εγγεγραμμένος του τριγώνου κύκλος εφάπτεται των πλευρών a, b, c στα σημεία A', B', C' αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{(AC')^2\,(a^4+b^4)}{a^4+a^2\,b^2+b^4} + \frac{(BA')^2\,(b^4+c^4)}{b^4+b^2\,c^2+c^4} + \frac{(CB')^2\,(c^4+a^4)}{c^4+c^2\,a^2+a^4} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{8}\,.$$

Πρόβλημα 52. Έστω $x\,y\,z \neq 0$. Να επιλυθεί το σύστημα,

$$\begin{aligned} x^2 - y\,z &= 5\,x^3\,y^2\,z^2, \\ y^2 - z\,x &= 3\,x^2\,y^3\,z^2, \\ z^2 - x\,y &= 4\,x^2\,y^2\,z^3, \end{aligned}$$

Πρόβλημα 53. Έστω a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι,

$$(a\,b+1)\,(b\,c+1)\,(c\,a+1) \leq \left(a^2 + \frac{b}{c}\right)\left(b^2 + \frac{c}{a}\right)\left(c^2 + \frac{a}{b}\right).$$

Πρόβλημα 54. Έστω a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι,

$$\sum_{cyc} \frac{5\,a-b-c}{7\,a+b+c} \leq 1 \leq \sum_{cyc} \frac{2\,b+2\,c-a}{2\,b+2\,c+5\,a}\,.$$

όπου το $\sum_{cyc}$ λαμβάνεται επί των κυκλικών μεταθέσεων των a, b, c.

Πρόβλημα 55. Έστω s η ημιπερίμετρος, r_a, r_b, r_c οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνων ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$(r_a^2+s^2)\,(r_b^2+s^2)\,(r_c^2+s^2) \geq \frac{64\sqrt{3}}{9}\,r_a\,r_b\,r_c\,s^3.$$

Πρόβλημα 56. Έστω a, b, c οι πλευρές, r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{1}{4\,r^2} \geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Πρόβλημα 57. Έστω a, b, c οι πλευρές, R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{R}{r^2} > \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Πρόβλημα 58. Έστω r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, r_a, r_b, r_c οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\sum_{cyc} \frac{1}{r_a^2 + r_a + 1} < \frac{6\,r+3}{9\,r^2+5\,r+1}\,.$$

όπου το $\sum_{cyc}$ λαμβάνεται επί των κυκλικών μεταθέσεων των r_a, r_b, r_c.

Πρόβλημα 59. Έστω a, b, c οι πλευρές, R οι ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι,

$$\frac{R}{r} \geq \frac{3\,a\,b\,c + \sum a^3}{\sum a^2\,(b+c-a)} \geq \frac{a\,b\,c+\sum a^3}{2\,a\,b\,c} \geq \max\left\{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\,,\ \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\,,\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right\}.$$

Πρόβλημα 60. Έστω V ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με σύνορο αποτελούμενο από n ζεύγη παραλλήλων υπερεπιπέδων διάστασης $n-1$ έκαστο. Οι κορυφές του V έχουν ακέραιες συντεταγμένες. Οι ακμές του V αντιστοιχούν σε στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ που δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο άλλων στοιχείων του $\mathbb{R}^n$ με ακέραιες συντεταγμένες, εκτός του εαυτού τους. Έστω N το πλήθος των στοιχείων του $\mathbb{R}^n$ με ακέραιες συντεταγμένες που βρίσκονται στο εσωτερικό του V. Να αποδείξετε ότι,

$$\int_V dx_1\,dx_2\,\cdots\,dx_n = N+1.$$

Πρόβλημα 61. Έστω $a_k = (-1)^k\,2\sqrt{3}\ \text{ημ}\,\dfrac{(3k+1)\,\pi}{9}$, $k = 0, 1, 2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ρητοί αριθμοί r_{mi}, $i = 0, 1, 2$ τέτοιοι ώστε για $m \neq k$ να ισχύει $a_m = \sum_{i=0}^{2} r_{mi}\,a_k^i$.

Πρόβλημα 62. Έστω $(\sim)$ μία σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{R}$ έτσι ώστε, για x, y πραγματικούς αριθμούς $x \sim y$ αν και μόνο αν $x-y$ είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι η ομάδα πηλίκο $\mathbb{R}/\!\sim$ είναι ισομορφική με τον μοναδιαίο κύκλο S^1 θεωρούμενο ως πολλαπλασιαστική ομάδα.

Πρόβλημα 64. Αν $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, να επιλύσετε την μερική διαφορική εξίσωση,

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 4\,(x^2+y^2)\ \text{συν}(x^2-y^2)$$