Ηλίας Λαμπάκης 4ο Γυμνάσιο Πύργου–Ηλείας 2017

# ΜΙΑ ΝΕΑ ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΤΟΥ ΑΔΥΝΑΤΟΥ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΗΣ ΚΥΒΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ FERMAT ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ, (ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ), ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΤΟΥ GAUSS

ΚΥΒΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ FERMAT : $x^3 + y^3 = z^3$

ΣΥΝΟΛΟ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΤΟΥ GAUSS : $\mathbb{Z}[i] = \{\alpha + \beta\, i \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$

## ΤΕΛΕΥΤΑΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ FERMAT

Δεν υπάρχουν ακέραιοι $x, y, z$ διάφοροι του μηδενός που να είναι ρίζες της εξίσωσης $x^n + y^n = z^n$ για $n \geq 3$, (WILES-TAYLOR, 1994).

## ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΜΕ ΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Αναζήτηση μη μηδενικών λύσεων της $x^n + y^n = z^n$ για $n \geq 3$ σε **ευρύτερα σύνολα** που περιέχουν τους ακέραιους και έχουν ίδιες ιδιότητες με αυτούς.

# ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΤΟΥ GAUSS

Το σύνολο $\mathbb{Z}[i] = \{\alpha + \beta\, i \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$ είναι επέκταση του $\mathbb{Z}$.

- Το $\mathbb{Z}[i]$ είναι μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα όπως και το $\mathbb{Z}$ δηλαδή,
  - Μεταθετική προσθετική ομάδα,
    - $(\alpha + \beta\, i) + (\gamma + \delta\, i) = (\gamma + \delta\, i) + (\alpha + \beta\, i) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)\, i$, για κάθε $\alpha + \beta\, i,\ \gamma + \delta\, i \in \mathbb{Z}[i]$.
    - Ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι το μηδέν, $(0 + 0\, i)$.
    - Για κάθε $\alpha+\beta\, i \in \mathbb{Z}[i]-\{0\}$ υπάρχει αντίθετο στοιχείο το $-\alpha-\beta\, i \in \mathbb{Z}[i]$.
    - Η πρόσθεση είναι προσεταιριστική.
  - Μεταθετική πολλαπλασιαστική ημιομάδα με ουδέτερο στοιχείο το ένα,
    - $(\alpha + \beta\, i) \cdot (\gamma + \delta\, i) = (\gamma + \delta\, i) \cdot (\alpha + \beta\, i) = (\alpha\,\gamma - \beta\,\delta) + (\alpha\,\delta + \beta\,\gamma)\, i$, για κάθε $\alpha + \beta\, i,\ \gamma + \delta\, i \in \mathbb{Z}[i]$.
    - Ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι το ένα, $(1 + 0\, i)$.
    - Ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός.
  - Ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση.

## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΤΟΥ GAUSS, (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

- Τα στοιχεία του έχουν τις ίδιες ιδιότητες διαιρετότητας με αυτά του $\mathbb{Z}$ όπως αυτές προκύπτουν από την ύπαρξη της Ευκλείδειας Διαίρεσης δηλαδή, για κάθε $\alpha+\beta\, i,\ 0\neq\gamma+\delta\, i\in\mathbb{Z}[i]$, υπάρχουν $\varepsilon+\zeta\, i,\ \eta+\theta\, i\in\mathbb{Z}[i]$ ώστε, $\alpha+\beta\, i=(\gamma+\delta\, i)\cdot(\varepsilon+\zeta\, i)+(\eta+\theta\, i)$ και είτε $\eta+\theta\, i=0$ είτε $|\eta+\theta\, i|<|\gamma+\delta\, i|$.
- Για τα στοιχεία του $\mathbb{Z}[i]$ ισχύει το θεμελιώδες θεώρημα της Αριθμητικής δηλαδή, κάθε στοιχείο του $\mathbb{Z}[i]$ παραγοντοποιείται κατά μοναδικό τρόπο σε γινόμενο «πρώτων» παραγόντων.

  Ο $\alpha+\beta\, i\in\mathbb{Z}[i]$ είναι πρώτος αν σε κάθε παραγοντοποίησή του $\alpha+\beta\, i=(\gamma+\delta\, i)\cdot(\varepsilon+\zeta\, i)$ με $\gamma+\delta\, i,\ \varepsilon+\zeta\, i\in\mathbb{Z}[i]$ ένας εκ των $\gamma+\delta\, i$, $\varepsilon+\zeta\, i$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του $\mathbb{Z}[i]$. Τα αντιστρέψιμα στοιχεία του $\mathbb{Z}[i]$ είναι τα $\pm 1$, $\pm i$.

## Η ΚΥΒΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ FERMAT ΣΤΟΥΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ ΤΟΥ GAUSS

Δεν υπάρχουν ακέραιοι του Gauss $x, y, z$ διάφοροι του μηδενός που να είναι ρίζες της εξίσωσης $x^3+y^3 = z^3$. (KARL RUDOLF FUETER, ΕΛΒΕΤΙΑ, (1880-1950), Απόδειξη, (1913), με μεθόδους Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών.)

## ΝΕΑ ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΤΟΥ ΑΔΥΝΑΤΟΥ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΗΣ $x^3 + y^3 = z^3$ ΣΤΟ $\mathbb{Z}[i] - \{0\}$

## ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΙΔΕΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Η μέθοδος στοχεύει στο να αποδείξει ότι αν η $x^3 + y^3 = z^3$ έχει λύσεις στο $\mathbb{Z}[i]-$ $-\{0\}$ τότε η εξίσωση $y^2 = x^3 + 432$ έχει λύσεις στο $\mathbb{Q} - \{0\}$. Όμως η εξίσωση $y^2 = x^3 + 432$ δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{Q} - \{0\}$, (πίνακες J. CREMONA εξίσωση 432A3).

## ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Έστω $(x_0, y_0, z_0) = (\alpha_1 + \beta_1 i\,,\ \alpha_2 + \beta_2 i\,,\ \alpha_3 + \beta_3 i)$ μία λύση της $x^3 + y^3 = z^3$ στο $\mathbb{Z}[i] - \{0\}$. Τότε, $x_0^3 + y_0^3 = z_0^3 \Leftrightarrow (\alpha_1 + \beta_1 i)^3 + (\alpha_2 + \beta_2 i)^3 = (\alpha_3 + \beta_3 i)^3$.

Αν $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ τότε, $(\beta_1 i)^3 + (\beta_2 i)^3 = (\beta_3 i)^3 \Rightarrow \beta_1^3 + \beta_2^3 = \beta_3^3 \Rightarrow$
$\beta_1 = 0$ ή $\beta_2 = 0$ ή $\beta_3 = 0$.

Σε κάθε περίπτωση είτε $x_0 = 0$ είτε $y_0 = 0$ είτε $z_0 = 0$ άτοπο.

Άρα, $|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| \neq 0$.

Αν $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ τότε, $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 = \alpha_3^3 \Rightarrow \alpha_1 = 0$ ή $\alpha_2 = 0$ ή $\alpha_3 = 0$.

Σε κάθε περίπτωση είτε $x_0 = 0$ είτε $y_0 = 0$ είτε $z_0 = 0$ άτοπο.

Άρα, $|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| \neq 0$.

**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 1ο : Αν $(\alpha_1 + \beta_1 \mathbf{i}, \alpha_2 + \beta_2 \mathbf{i}, \alpha_3 + \beta_3 \mathbf{i})$ είναι μία υποθετική λύση της $\mathbf{x}^3 + \mathbf{y}^3 = \mathbf{z}^3$ στο $\mathbb{Z}[\mathbf{i}] - \{\mathbf{0}\}$ τότε,**

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| \neq \mathbf{0},$$

$$|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| \neq \mathbf{0}.$$

Θεωρούμε τα πολυώνυμα $p_1(x) = \alpha_1 + \beta_1\, x$, $p_2(x) = \alpha_2 + \beta_2\, x$, $p_3(x) = \alpha_3 + \beta_3\, x$, $f(x) = [p_1(x)]^3 + [p_2(x)]^3 - [p_3(x)]^3 = (\alpha_1 + \beta_1\, x)^3 + (\alpha_2 + \beta_2\, x)^3 - (\alpha_3 + \beta_3\, x)^3$. Με αντιπαραβολή των,

$$\begin{aligned}(\alpha_1 + \beta_1\, i)^3 + (\alpha_2 + \beta_2\, i)^3 - (\alpha_3 + \beta_3\, i)^3 &= 0,\\ (\alpha_1 + \beta_1\, x)^3 + (\alpha_2 + \beta_2\, x)^3 - (\alpha_3 + \beta_3\, x)^3 &= 0,\end{aligned}$$

προκύπτει για το πολυώνυμο $f(x)$ ότι $f(i) = 0$. Επειδή $\overline{f(x)} = f(\bar{x})$, και $f(-i) = 0$.

**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 2ο : Αν $(\alpha_1 + \beta_1\, \mathbf{i}, \alpha_2 + \beta_2\, \mathbf{i}, \alpha_3 + \beta_3\, \mathbf{i})$ είναι μία υποθετική λύση της $\mathbf{x^3 + y^3 = z^3}$ στο $\mathbb{Z}[\mathbf{i}] - \{\mathbf{0}\}$ τότε το πολυώνυμο $\mathbf{f(x)}$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες $\mathbf{i}$ και $\mathbf{-i}$. Άρα το $\mathbf{f(x)}$ έχει ως παράγοντα το πολυώνυμο $\mathbf{x^2 + 1 = (x - i)\,(x + i)}$.**

Επειδή $f(x) = (\alpha_1 + \beta_1\, x)^3 + (\alpha_2 + \beta_2\, x)^3 - (\alpha_3 + \beta_3\, x)^3$, ο συντελεστής του $x^3$ είναι $\beta_1^3 + \beta_2^3 - \beta_3^3$. Ο βαθμός του $f(x)$ θα είναι 2 αν $\beta_1^3 + \beta_2^3 = \beta_3^3$ ενώ θα είναι 3 αν $\beta_1^3 + \beta_2^3 \neq \beta_3^3$.

Έστω $\beta_1^3+\beta_2^3=\beta_3^3$. Τότε, είτε $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(0,\beta,\beta)$ είτε $(\beta,0,\beta)$ είτε $(\beta,-\beta,0)$ είτε $(-\beta,\beta,0)$ για κάποιο ακέραιο $\beta$. Για την περίπτωση $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(0,\beta,\beta)$ από την $x_0^3+y_0^3-z_0^3=0$ προκύπτει, (ομοίως αντιμετωπίζονται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις),

$$\left[\alpha_1^3+\alpha_2^3-\alpha_3^3+3\,\beta^2\,(\alpha_3-\alpha_2)\right]-\left[3\,\beta\,\left(\alpha_3^2-\alpha_2^2\right)\right]i\;=\;0 \tag{1}$$

Αν $\beta=0$ τότε, $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(0,0,0)$ άτοπο από την $|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|\neq 0$.

Αν $\alpha_2=\alpha_3$ τότε, από την (1) προκύπτει $\alpha_1=0$ δηλαδή $x_0=\alpha_1+\beta_1\,i=0$ άτοπο.

Αν $\alpha_2=-\alpha_3$ τότε, από την (1) προκύπτει,

$$\begin{aligned}6\,\beta^2\,\alpha_3=(-\alpha_1)^3+2\,\alpha_3^3 &\Rightarrow\; 3\,(2\,\beta)^2\,(2\,\alpha_3)=4\,(-\alpha_1)^3+(2\,\alpha_3)^3\\ &\Rightarrow\; 4^2\,3^4\,(2\,\beta)^2\,(2\,\alpha_3)=4^3\,3^3\,(-\alpha_1)^3+4^2\,3^3\,(2\,\alpha_3)^3\\ &\Rightarrow\; (72\,\beta)^2\,(2\,\alpha_3)=(-12\,\alpha_1)^3+432\,(2\,\alpha_3)^3. \qquad (2)\end{aligned}$$

Αν $\alpha_3=0$ τότε, από την (2) και $\alpha_1=0$. Επειδή και $\beta_1=0$ θα έχουμε $x_0=\alpha_1+\beta_1\,i=0$ άτοπο. Διαιρώντας τα δύο μέλη της (2) με $(2\,\alpha_3)^3$ προκύπτει ότι το ζεύγος μη μηδενικών ρητών $(-6\,\alpha_1/\alpha_3\,,\,36\,\beta/\alpha_3)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $y^2=x^3+432$. Αυτό είναι άτοπο, (πίνακες J. CREMONA εξίσωση 432A3).

**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 3ο : Αν $(\alpha_1+\beta_1\,\mathbf{i}\,,\ \alpha_2+\beta_2\,\mathbf{i}\,,\ \alpha_3+\beta_3\,\mathbf{i})$ είναι μία υποθετική λύση της $\mathbf{x^3+y^3=z^3}$ στο $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]-\{\mathbf{0}\}$ τότε το πολυώνυμο $\mathbf{f(x)}$ έχει βαθμό 3.**

Ο σταθερός όρος του πολυωνύμου $f(x)=(\alpha_1+\beta_1\,x)^3+(\alpha_2+\beta_2\,x)^3-(\alpha_3+\beta_3\,x)^3$ είναι $\alpha_1^3+\alpha_2^3-\alpha_3^3$. Αν υποθέσουμε ότι ο σταθερός όρος του $f(x)$ είναι μηδέν δηλαδή, $\alpha_1^3+\alpha_2^3=\alpha_3^3$ τότε με ακριβώς ανάλογα βήματα με αυτά της απόδειξης του Συμπεράσματος 3 καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα, ο σταθερός όρος του $f(x)$ είναι μη μηδενικός. Αν συμβολίσουμε με $\delta=\beta_1^3+\beta_2^3-\beta_3^3$ τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου και με $\gamma=\alpha_1^3+\alpha_2^3-\alpha_3^3$ τον σταθερό όρο του $f(x)$ έχουμε ήδη αποδείξει ότι $\delta,\gamma\in\mathbb{Z}-\{0\}$. Από το Συμπέρασμα 2 το πολυώνυμο $x^2+1$ είναι παράγοντας του $f(x)$.

**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 4ο : Αν $(\alpha_1+\beta_1\,\mathbf{i}\,,\ \alpha_2+\beta_2\,\mathbf{i}\,,\ \alpha_3+\beta_3\,\mathbf{i})$ είναι μία υποθετική λύση της $\mathbf{x^3+y^3=z^3}$ στο $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]-\{\mathbf{0}\}$ τότε το πολυώνυμο $\mathbf{f(x)=(x^2+1)}\,(\delta\,\mathbf{x}+\gamma)$, με $\delta,\gamma\in\mathbb{Z}-\{\mathbf{0}\}$. Ο μη μηδενικός ρητός $-\gamma/\delta$ είναι η τρίτη ρίζα του $\mathbf{f(x)}$.**

Από το $f(-\gamma/\delta)=0$ παίρνουμε,

$$(\delta\,\alpha_1-\beta_1\,\gamma)^3+(\delta\,\alpha_2-\beta_2\,\gamma)^3-(\delta\,\alpha_3-\beta_3\,\gamma)^3=0. \tag{3}$$

Θέτουμε $I=\{1,2,3\}$. Θα δείξουμε ότι $\delta\,\alpha_m-\beta_m\,\gamma=0$ για ακριβώς ένα $m\in I$.

- Αν $\delta\,\alpha_m-\beta_m\,\gamma\neq 0$ για κάθε $m\in I$ τότε, από την (3) παίρνουμε,

  $$(\alpha_1\,\delta-\beta_1\,\gamma)^3+(\alpha_2\,\delta-\beta_2\,\gamma)^3=(\alpha_3\,\delta-\beta_3\,\gamma)^3,$$

  άτοπο γιατί η $x^3+y^3=z^3$ δεν έχει μη μηδενικές ακέραιες λύσεις.
- Αν $\delta\,\alpha_m-\beta_m\,\gamma=0$ για κάθε $m\in I$ τότε, $\alpha_m\,\delta=\beta_m\,\gamma$. Επειδή $\delta\neq 0$, αν $\beta_m=0$ τότε και $\alpha_m=0$ άτοπο γιατί οι $\alpha_m+\beta_m\,i$ έχουν υποτεθεί μη μηδενικοί. Άρα, $\beta_m\neq 0$ για κάθε $m\in I$. Από την $\alpha_m=(\gamma/\delta)\,\beta_m$ έπεται $x_0=\alpha_1+\beta_1\,i=\frac{\beta_1}{\delta}\,(\gamma+\delta\,i)$. Ομοίως, $y_0=\frac{\beta_2}{\delta}\,(\gamma+\delta\,i)$, $z_0=\frac{\beta_3}{\delta}\,(\gamma+\delta\,i)$. Από την $x_0^3+y_0^3=z_0^3$ προκύπτει $\beta_1^3+\beta_2^3=\beta_3^3$ δηλαδή, είτε $\beta_1=0$, είτε $\beta_2=0$, είτε $\beta_3=0$ άτοπο.
- Αν $\delta\,\alpha_m-\beta_m\,\gamma=0$ για δύο τιμές του $m\in I$ τότε, από την (3) έπεται ότι $\delta\,\alpha_m-\beta_m\,\gamma=0$ και για την τρίτη τιμή του $m$ άτοπο από την προηγούμενη περίπτωση.

- Από τις προηγούμενες περιπτώσεις και την (3) προκύπτει ότι $\delta\,\alpha_m - \beta_m\,\gamma = 0$ για ακριβώς μία τιμή του $m \in I$.

Για $m = 1$, (ομοίως οι περιπτώσεις $m = 2$ και $m = 3$), από την $\delta\,\alpha_1 - \beta_1\,\gamma = 0$ και την (3) προκύπτουν,

$$\begin{aligned} \alpha_1\,\delta &= \beta_1\,\gamma, && (4)\\ (\alpha_2 - \alpha_3)\,\delta &= (\beta_2 - \beta_3)\,\gamma. && (5) \end{aligned}$$

Επειδή $\gamma, \delta, x_0 \neq 0$, από την (4) προκύπτουν $\alpha_1, \beta_1 \neq 0$ και $\delta = \frac{\beta_1}{\alpha_1}\gamma$. Η (5) δίνει,

$$(\alpha_2 - \alpha_3)\,\beta_1 = (\beta_2 - \beta_3)\,\alpha_1. \qquad (6)$$

Επειδή $\alpha_1, \beta_1 \neq 0$, τότε και $\beta_2 \neq \beta_3$, $\alpha_2 \neq \alpha_3$ αλλιώς, $y_0 = z_0$ και $x_0 = 0$ άτοπο.

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_3} = \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_3} = \lambda \in \mathbb{Q} - \{0\}. \qquad (7)$$

Ως επακόλουθο της (7) λαμβάνουμε την,

$$x_0 = \alpha_1 + \beta_1\,i = \lambda\,[(\alpha_2 - \alpha_3) + (\beta_2 - \beta_3)\,i] = \lambda\,(y_0 - z_0).$$

Ομοίως οι περιπτώσεις $m = 2$ και $m = 3$ οδηγούν στις σχέσεις,

$$y_0 = \lambda\,(x_0 - z_0)\,,\ z_0 = \lambda\,(x_0 + y_0).$$

**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 5ο : Αν $(\alpha_1+\beta_1\,\mathbf{i},\ \alpha_2+\beta_2\,\mathbf{i},\ \alpha_3+\beta_3\,\mathbf{i})$ είναι μία υποθετική λύση της $\mathbf{x^3+y^3=z^3}$ στο $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]-\{\mathbf{0}\}$ τότε υπάρχει $\lambda\in\mathbb{Q}-\{\mathbf{0}\}$ έτσι ώστε για τους $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ να προκύπτει ΑΚΡΙΒΩΣ ΜΙΑ από τις πιο κάτω σχέσεις,**

$$\alpha_1=\lambda\,(\alpha_2-\alpha_3)\quad\text{και}\quad\beta_1=\lambda\,(\beta_2-\beta_3)\Rightarrow\mathbf{x_0}=\lambda\,(\mathbf{y_0}-\mathbf{z_0})\tag{8}$$

$$\alpha_2=\lambda\,(\alpha_1-\alpha_3)\quad\text{και}\quad\beta_2=\lambda\,(\beta_1-\beta_3)\Rightarrow\mathbf{y_0}=\lambda\,(\mathbf{x_0}-\mathbf{z_0})$$

$$\alpha_3=\lambda\,(\alpha_1+\alpha_2)\quad\text{και}\quad\beta_3=\lambda\,(\beta_1+\beta_2)\Rightarrow\mathbf{z_0}=\lambda\,(\mathbf{x_0}+\mathbf{y_0})$$

Μελετάμε την (8), (ομοίως και οι υπόλοιπες περιπτώσεις). Επειδή $x_0\neq 0$ από την $x_0^3+y_0^3=z_0^3$ έπεται ότι $y_0\neq z_0$. Άρα, $w_0=(y_0/z_0)\neq 1$. Επιπλέον,

$$w_0=\frac{\alpha_2\,\alpha_3+\beta_2\,\beta_3}{\alpha_3^2+\beta_3^2}+\frac{\alpha_3\,\beta_2-\alpha_2\,\beta_3}{\alpha_3^2+\beta_3^2}\,i\tag{9}$$

$$\left(\frac{x_0}{z_0}\right)^3+\left(\frac{y_0}{z_0}\right)^3=1\Rightarrow\left(\frac{\lambda\,(y_0-z_0)}{z_0}\right)^3+\left(\frac{y_0}{z_0}\right)^3=1\Rightarrow\lambda^3\,(w_0-1)^3+(w_0^3-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(w_0-1)\,[(\lambda^3+1)\,w_0^2+(-2\,\lambda^3+1)\,w_0+(\lambda^3+1)]=0\overset{w_0\neq1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow(\lambda^3+1)\,w_0^2+(-2\,\lambda^3+1)\,w_0+(\lambda^3+1)=0.\tag{10}$$

Αν $\lambda=-1$ η (10) δίνει $w_0=0$ άτοπο αφού $w_0=(y_0/z_0)\neq 0$. Άρα, $\lambda\neq -1$. Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (10) είναι $\Delta=-12\,\lambda^3-3$.

- Αν $\Delta=0$ τότε, $\lambda=\sqrt[3]{\frac{-1}{4}}$ άτοπο αφού $\lambda\in\mathbb{Q}-\{0\}$.
- Αν $\Delta>0$ τότε, $w_0\in\mathbb{R}$ οπότε, $\alpha_3\,\beta_2-\alpha_2\,\beta_3=0$. Αν $\alpha_3=0$ έπεται $\alpha_2\,\beta_3=0$. Όμως $\beta_3=0$ θα έδινε $z_0=0$ άτοπο. Άρα $\alpha_2=0$. Από την (8) όμως $x_0=\alpha_1+\beta_1\,i=\lambda\,(y_0-z_0)$ έπεται $\alpha_1=0$ άτοπο γιατί $|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|\neq 0$. Άρα, $\alpha_3\neq 0$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\beta_3\neq 0$, $\alpha_2\neq 0$, $\beta_2\neq 0$. Τελικώς,

  $$\alpha_2/\alpha_3=\beta_2/\beta_3=k\in\mathbb{Q}-\{0\}\Rightarrow y_0=k\,z_0.$$

  Σε αυτή την περίπτωση από την $x_0^3+y_0^3=z_0^3$ λαμβάνουμε,

  $$\lambda^3\,(y_0-z_0)^3+y_0^3=z_0^3\Rightarrow[\lambda^3\,(k-1)^3+k^3]\,z_0^3=z_0^3\Rightarrow\lambda^3\,(k-1)^3+k^3=1.\quad(11)$$

  Αν $k=1$ τότε, από τις $y_0=k\,z_0$, $x_0^3+y_0^3=z_0^3$ έπεται $x_0{=}0$ άτοπο. Άρα $k\in\mathbb{Q}-\{0,1\}$. Αν θέσουμε $\lambda\,(k-1)=\tau/\sigma$, $k=\xi/\rho$ στην (11) προκύπτει,

  $$(\tau/\sigma)^3+(\xi/\rho)^3=1\Rightarrow(\tau\,\rho)^3+(\xi\,\sigma)^3=(\rho\,\sigma)^3,\ \tau,\xi,\rho,\sigma\in\mathbb{Z}-\{0\},$$

  άτοπο.

- Άρα, $\Delta < 0$ και $\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{|\Delta|}\, i = \pm\sqrt{12\,\lambda^3+3}\, i$. Από την δευτεροβάθμια εξίσωση (10) λαμβάνουμε,

$$w_0 = \frac{2\,\lambda^3-1}{2\,(\lambda^3+1)} \pm \frac{\sqrt{12\,\lambda^3+3}}{2\,(\lambda^3+1)}\, i.$$

Επίσης έχουμε δείξει ότι $\alpha_3\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_3 \neq 0$. Από την (9) το προηγούμενο συμπέρασμα έπεται ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{Q} - \{0\}$ ώστε,

$$\begin{aligned}
\mu = \sqrt{12\,\lambda^3+3} \;\Rightarrow\; & 9\,\left(\frac{\mu}{3}\right)^2 = 12\,\lambda^3 + 3 \Rightarrow \\
& 3\,\left(\frac{\mu}{3}\right)^2 = 4\,\lambda^3 + 1 \Rightarrow \\
& 4^2\,3^4\,\left(\frac{\mu}{3}\right)^2 = 4^3\,3^3\,\lambda^3 + 4^2\,3^3 \Rightarrow \\
& (12\,\mu)^2 = (12\,\lambda)^3 + 432.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, η εξίσωση $y^2 = x^3 + 432$ έχει ως ρίζες το ζεύγος μη μηδενικών ρητών $(x, y) = (12\,\lambda, 12\,\mu)$.

**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 6ο : Αν $(\alpha_1+\beta_1\,\mathbf{i}\,,\ \alpha_2+\beta_2\,\mathbf{i}\,,\ \alpha_3+\beta_3\,\mathbf{i})$ είναι μία υποθετική λύση της $\mathbf{x^3+y^3=z^3}$ στο $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]-\{\mathbf{0}\}$ τότε η εξίσωση $\mathbf{y^2=x^3+432}$ έχει μη μηδενικές ρητές λύσεις.**

Συνδυάζοντας τα Συμπεράσματα 1 έως 6 και το γεγονός ότι η εξίσωση $y^2=x^3+432$ δεν έχει ρητές λύσεις, (πίνακες J. CREMONA εξίσωση 432A3), καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα δηλαδή ότι η κυβική εξίσωση FERMAT δεν έχει λύσεις στους μη μηδενικούς ακέραιους του GAUSS.