ΕΠΕΚΤΕΙΝΟΝΤΑΣ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ, (Ή ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΩΝ), ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΕ ΠΩΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΡΤΙΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ, (Ή ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΕΣ) ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$a_{2n}\,x^{2n}+a_{2n-1}\,x^{2n-1}+\cdots+a_{n+1}\,x^{n+1}+a_n\,x^n+a_{n+1}\,x^{n-1}+\cdots+a_{2n-1}\,x+a_{2n}=0\,,\quad a_{2n}\neq 0$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ, (Ή ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΩΝ) ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Διαιρούμε την εξίσωση με x^n. $x\neq 0$ γιατί $a_{2n}\neq 0$

$$\begin{aligned}
a_{2n}\,x^n+a_{2n-1}\,x^{n-1}+\cdots+a_{n+1}\,x+a_n+a_{n+1}\,\frac{1}{x}+\cdots+a_{2n-1}\,\frac{1}{x^{n-1}}+a_{2n}\,\frac{1}{x^n} &= 0\\
a_{2n}\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+a_{2n-1}\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+\cdots+a_{n+1}\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_n &= 0\\
\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right) &= \left(x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}\right),\ k=0,1,2,\ldots\\
\left(x^0+\frac{1}{x^0}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x}+x\right)=2\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right) &= y\,, \qquad k=0\\
\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^0+\frac{1}{x^0}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) &= y^2-2\,, \qquad k=1\\
\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=(y^2-2)\,y-y &= y^3-3\,y\,, \qquad k=2
\end{aligned}$$

και ούτω καθ΄ εξής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

$$\begin{aligned} 2\,x^4+5\,x^3+6\,x^2+5\,x+2 &= 0 \Leftrightarrow \\ 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6 &= 0 \Leftrightarrow \\ 2\,(y^2-2)+5\,y+6 &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2\,y^2+5\,y+2 &= 0 \\ x^2-y\,x+1 &= 0 \end{cases}$$

$$y_{1,2}=-\frac{1}{2},\ -2.\ \ x^2+\frac{1}{2}\,x+1=0 \text{ ή } x^2+2\,x+1=0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

ΑΛΓΕΒΡΑ Β′ ΛΥΚΕΙΟΥ, ΑΣΚΗΣΗ 4 ι), ΣΕΛ. 155

$$\begin{aligned} x^4+x^3-16\,x^2-2\,x+4 &= 0 \Leftrightarrow \ \text{(όχι παλίνδρομη. Αντιμετωπίζεται όμως ομοίως)} \\ \left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)+\left(x-\frac{2}{x}\right)-16 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(x-\frac{2}{x}\right)=y \quad , \quad \left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)=y^2+4$$

$$\begin{cases} y^2+y-12 &= 0 \\ x^2-y\,x-2 &= 0 \end{cases}$$

$$y_{1,2}=3,\ -4.\ \ x^2-3\,x-2=0 \text{ ή } x^2+4\,x-2=0.$$

$$\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{-2}\right)^2,\ \frac{a_4}{a_0}=\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2.$$

ΕΡΩΤΗΜΑ

ΠΟΙΕΣ ΙΚΑΝΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΟΥΝ ΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΜΙΑΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

$$a_{2\,n}\,x^{2\,n}+a_{2\,n-1}\,x^{2\,n-1}+\cdots+a_{n+1}\,x^{n+1}+a_n\,x^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+\cdots+a_1\,x+a_0=0\,,\quad a_{2\,n}\neq 0$$

ΩΣΤΕ ΜΕ ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΜΕ x^n ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΝΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ $y=t\,x+\dfrac{\ell}{x}$, $t\,\ell\neq 0$ ΝΑ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

$$\begin{cases} A_n\,y^n+A_{n-1}\,y^{n-1}+\cdots+A_1\,y+A_0=0, & A_n\neq 0\\ t\,x^2-y\,x+\ell=0, & t\,\ell\neq 0\end{cases}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\frac{a_{2\,n-k}}{a_k}=\left(\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}\right)^{n-k},\quad k=0,1,\ldots,n-1,$$

όταν όλοι οι ισαπέχοντες από τα άκρα συντελεστές είναι μη μηδενικοί.

$$\frac{a_{2\,n-k}}{a_k}=\left(\frac{t}{\ell}\right)^{n-k},\quad k=0,1,\ldots,n-1,$$

για τα ζεύγη ισαπεχόντων συντελεστών $a_{2\,n-k}$, a_k που είναι μη μηδενικοί,

$$a_{2\,n-k}=a_k=0,\quad k=1,\ldots,n-1,$$

αν κάποιος από τους $a_{2\,n-k}$, a_k είναι μηδέν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

$$3\,x^8+2\,x^7-56\,x^6-28\,x^5+392\,x^4+56\,x^3-224\,x^2-16\,x+48 \;=\; 0$$

$$a_8=3,\ a_7=2\,,a_6=-56,\ a_5=-28,\ a_4=392,\ a_3=56,\ a_2=-224,\ a_1=-16,\ a_0=48 \quad , \quad n=4,\ k=0,1,2,3$$

$$\frac{a_8}{a_0}=\left(-\frac{1}{2}\right)^4,\ \frac{a_7}{a_1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^3,\ \frac{a_6}{a_2}=\left(-\frac{1}{2}\right)^2,\ \frac{a_5}{a_3}=-\frac{1}{2}$$

$$3\left(x^4+\frac{16}{x^4}\right)+2\left(x^3-\frac{8}{x^3}\right)-56\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-28\left(x-\frac{2}{x}\right)+392 \;=\; 0$$

$$\left(x-\frac{2}{x}\right) = y$$

$$\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right) = y^2+4$$

$$\left(x^3-\frac{8}{x^3}\right) = y^3+6\,y$$

$$\left(x^4+\frac{16}{x^4}\right) = y^4+8\,y^2+8$$

$$\begin{cases} 3\,y^4+2\,y^3-32\,y^2-16\,y+192 = 0 \\ x^2-y\,x-2 = 0 \end{cases}$$

$$A_4=3,\ A_3=2,\ A_2=-32,\ A_1=-16,\ A_0=192 \quad , \quad n=2,\ k=0,1$$

$$\frac{A_4}{A_0}=\left(-\frac{1}{8}\right)^2,\ \frac{A_3}{A_1}=-\frac{1}{8}$$

$$3\left(y^2+\frac{64}{y^2}\right)+2\left(y-\frac{8}{y}\right)-32 = 0$$

$$\left(y-\frac{8}{y}\right)=z,\ \left(y^2+\frac{64}{y^2}\right)=z^2+16$$

$$\begin{cases} \begin{cases} 3\,z^2+2\,z+16 = 0 \\ y^2-z\,y-8 = 0 \end{cases} \\ x^2-y\,x-2 = 0 \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

$$3\,x^8-56\,x^6+392\,x^4-224\,x^2+48 = 0$$

$$a_8=3,\ a_7=0,\ a_6=-56,\ a_5=0,\ a_4=392,\ a_3=0,\ a_2=-224,\ a_1=0,\ a_0=48 \quad , \quad n=4,\ k=0,1,2,3$$

$$\frac{a_8}{a_0}=\left(-\frac{1}{2}\right)^4,\ \frac{a_6}{a_2}=\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$3\left(x^4+\frac{16}{x^4}\right)-56\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)+392 = 0$$

$$\left(x-\frac{2}{x}\right)=y,\ \left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)=y^2+4,\ \left(x^4+\frac{16}{x^4}\right)=y^4+8\,y^2+8$$

$$\begin{cases} 3\,y^4-32\,y^2+192 &= 0\\ x^2-y\,x-2 &= 0\end{cases}$$

$$y^2=z$$

$$\begin{cases} 3\,z^2-32\,z+192 &= 0\\ x^2-y\,x-2 &= 0\end{cases}$$

ΠΕΡΙΓΡΑΜΜΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

ΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝ–ΟΙ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ :

Έστω ότι η εξίσωση,

$$a_{2\,n}\,x^{2\,n}+a_{2\,n-1}\,x^{2\,n-1}+\cdots+a_{n+1}\,x^{n+1}+a_n\,x^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+\cdots+a_1\,x+a_0=0$$

έχει μη μηδενικούς συντελεστές και μπορεί να μετασχηματισθεί στο ισοδύναμο σύστημα,

$$\begin{cases} A_n\,y^n+A_{n-1}\,y^{n-1}+\cdots+A_1\,y+A_0=0, & A_n\neq 0\\ t\,x^2-y\,x+\ell=0, & t\,\ell\neq 0\end{cases}$$

με διαίρεση της εξίσωσης με x^n και εφαρμογή του μετασχηματισμού $y=t\,x+\dfrac{\ell}{x}$, $t\,\ell\neq 0$.

Λύνοντας τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος ως προς y και αντικαθιστώντας στην πρώτη προκύπτει η ισοδύναμη πολυωνυμική εξίσωση,

$$\sum_{r=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-r}\binom{n-r}{i} A_{n-r}\, t^{n-r-i}\,\ell^{i}\,\frac{x^{n-r-i}}{x^{i}}\right)+A_0=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\sum_{r=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-r}\binom{n-r}{i} A_{n-r}\, t^{n-r-i}\,\ell^{i}\,\frac{x^{2\,(n-i)-r}}{x^{n}}\right)+\frac{A_0\,x^n}{x^n}=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\sum_{r=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-r}\binom{n-r}{i} A_{n-r}\, t^{n-r-i}\,\ell^{i}\,x^{2\,(n-i)-r}\right)+A_0\,x^n=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{2\,n} B_{2\,n-k}\,x^{2\,n-k}=0 \qquad \text{με,}$$

$$B_{2\,n-k} \;=\; \sum_{s=0}^{\min\{\lfloor k/2\rfloor,\,n-\lfloor (k+1)/2\rfloor\}}\binom{n+\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor-2\,s}{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-s} A_{n+\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor-2\,s}\; t^{n-\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor-s}\,\ell^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-s},\quad k=0,1,\ldots,2\,n$$

Η αρχική εξίσωση και η πιο πάνω είναι ισοδύναμες. Ένα $\mu\in\mathbb{R}-\{0\}$ υπάρχει ώστε,

$$a_{2\,n-k}=\mu\,B_{2\,n-k},\quad k=0,1,\ldots,2\,n$$

Αποδεικνύεται ότι,

$$B_{2\,n-k} \;=\; t^{n-k}\sum_{s=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{n+\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor-2\,s}{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-s} A_{n+\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor-2\,s}\, t^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-s}\,\ell^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-s},\; k=0,1,\ldots,n-1$$

ενώ,

$$B_{k} \;=\; \ell^{n-k}\sum_{s=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{n+\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor-2\,s}{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-s} A_{n+\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor-2\,s}\, t^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-s}\,\ell^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-s},\; k=0,1,\ldots,n-1$$

Τελικώς,

$$\frac{a_{2\,n-k}}{a_k}=\left(\frac{t}{\ell}\right)^{n-k} \qquad ,k=0,1,\ldots,n-1$$

Επιπλέον, για $k=n-1$ παίρνουμε $a_{n+1}/a_{n-1}=t/\ell$.

ΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝ–ΟΙ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΙΝΑΙ ΙΚΑΝΕΣ :

Έστω ότι $a_{2\,n-k} = \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_{n-1}}\right)^{n-k} a_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Διαιρώντας την εξίσωση,

$$a_{2\,n}\, x^{2\,n} + a_{2\,n-1}\, x^{2\,n-1} + \cdots + a_{n+1}\, x^{n+1} + a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0 = 0$$

με x^n παίρνουμε,

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(a_{2\,n-k}\, x^{n-k} + \frac{a_k}{x^{n-k}}\right)\right) + a_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_{n-1}^{n-k}} \left(a_{n+1}^{n-k}\, x^{n-k} + \frac{a_{n-1}^{n-k}}{x^{n-k}}\right)\right) + a_n = 0. \tag{1}$$

Επίσης ισχύει,

$$a^{m+1}x^{m+1} + \frac{b^{m+1}}{x^{m+1}} = \left(a^m x^m + \frac{b^m}{x^m}\right)\left(a\,x + \frac{b}{x}\right) - a\,b\left(a^{m-1}x^{m-1} + \frac{b^{m-1}}{x^{m-1}}\right) \tag{2}$$

Θέτουμε $a_{n+1}\,x + (a_{n-1}/x) = y$. Έστω $m \in \mathbb{N} - \{0\}$. Υποθέτουμε ότι για όλα τα $p \in \{1, 2, \ldots, m\}$ υπάρχουν $C_{i,p} \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, p$ ώστε $C_{p,p} \neq 0$ και

$$a_{n+1}^p\, x^p + \frac{a_{n-1}^p}{x^p} = \sum_{i=0}^{p} C_{i,p}\, y^i \tag{3}$$

(2) και (3) συνεπάγονται ότι υπάρχουν $D_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m+1$ ώστε $D_{m+1} \neq 0$ και

$$a_{n+1}^{m+1}\, x^{m+1} + \frac{a_{n-1}^{m+1}}{x^{m+1}} = \sum_{i=0}^{m+1} D_i\, y^i$$

Το πιο πάνω επαγωγικό επί του m επιχείρημα μαζί με τον μετασχηματισμό $y = a_{n+1}\,x + (a_{n-1}/x)$ και την εξίσωση (1) συνεπάγονται τον μετασχηματισμό της αρχικής εξίσωσης στο επιθυμητό σύστημα.

ΚΑΠΟΙΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝ :

Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΓΙΝΕΤΑΙ ΜΕ ΤΡΟΠΟ ΑΝΑΛΟΓΟ ΤΟΥ ΠΙΟ ΠΑΝΩ