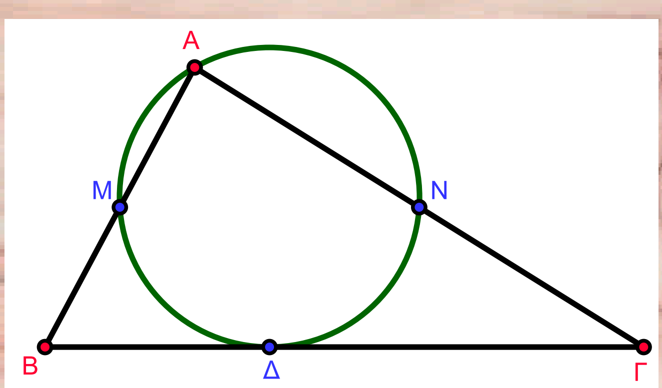
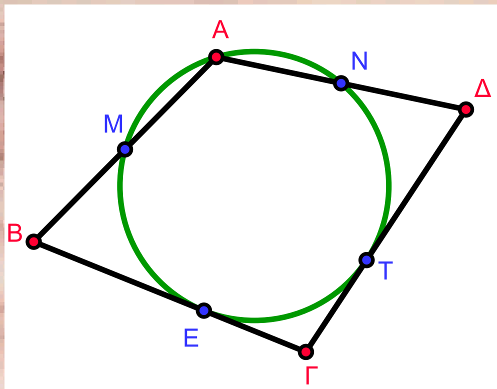
Ηλίας Λαμπάκης 4ο Γυμνάσιο Πύργου–Ηλείας 2016

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΟΠΟΙΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΚΥΚΛΟΣ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΜΙΑ ΚΟΡΥΦΗ ΤΟΥΣ ΤΑ ΜΕΣΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΚΕΙΜΕΝΩΝ ΤΗΣ ΚΟΡΥΦΗΣ ΠΛΕΥΡΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΕΤΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ



(α′) Σχήμα 1 M, N Μέσα

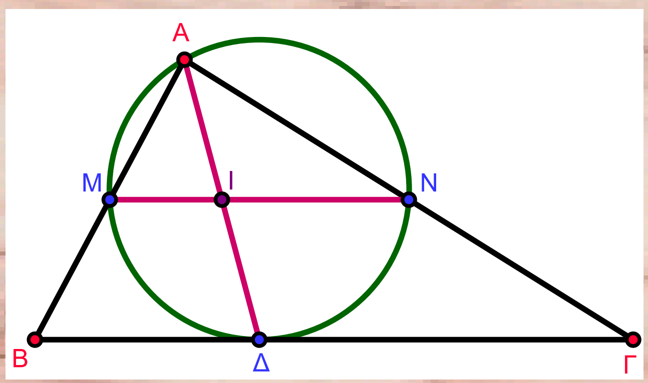


(β′) Σχήμα 2 M, N Μέσα

ΚΙΝΗΤΡΟ : ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α′ ΚΑΙ Β′ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΕΛ. 203 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ

Άσκηση 2 : Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ο κύκλος που διέρχεται από το A και τα μέσα M, N των AB, $A\Gamma$ αντίστοιχα, εφάπτεται της $B\Gamma$ στο Δ, να αποδείξετε ότι $A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$.

Λύση



(γ′) Σχήμα 3

$AM = MB$

$AN = N\Gamma$

$MI \overset{//}{=} \dfrac{\Delta B}{2}$

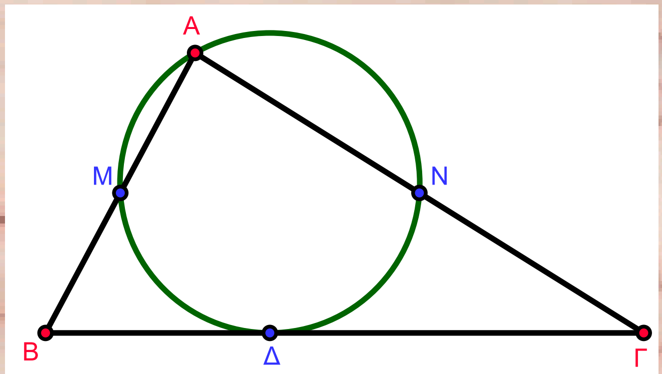
$IN \overset{//}{=} \dfrac{\Delta\Gamma}{2}$

$AI = I\Delta = \dfrac{A\Delta}{2}$

$AI \cdot I\Delta = MI \cdot IN$

$\dfrac{A\Delta^2}{4} = \dfrac{\Delta B}{2} \cdot \dfrac{\Delta\Gamma}{2} \Rightarrow A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$

ΕΣΤΩ ΤΡΙΓΩΝΟ $AB\Gamma$ ΜΕ ΜΗΚΗ ΠΛΕΥΡΩΝ $AB = \gamma$, $B\Gamma = a$, $\Gamma A = \beta$.



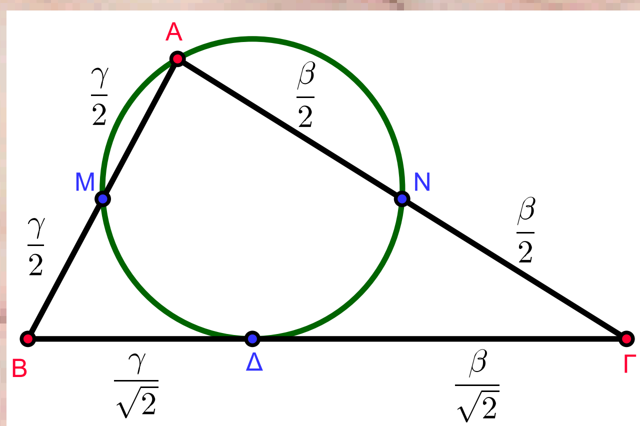
(δ΄) Σχήμα 4

ΙΚΑΝΗ ΚΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ ΩΣΤΕ ΚΥΚΛΟΣ ΝΑ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ A ΤΑ ΜΕΣΑ M, N ΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ AB, $A\Gamma$ ΚΑΙ ΝΑ ΕΦΑΠΤΕΤΑΙ ΤΗΣ ΤΡΙΤΗΣ ΠΛΕΥΡΑΣ $B\Gamma$ ΣΤΟ Δ ΕΙΝΑΙ :

$$\begin{aligned}
3-2\sqrt{2} < {} & \frac{\beta}{\gamma} < 3+2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(\text{Αφού}, \frac{1}{3-2\sqrt{2}} = 3+2\sqrt{2}\,, \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = 3-2\sqrt{2}\right) \\
3-2\sqrt{2} < {} & \frac{\gamma}{\beta} < 3+2\sqrt{2} \qquad (\text{Ή κατά προσέγγιση}) \\
0,171573\ldots < {} & \frac{\beta}{\gamma} < 5,828427\ldots \Leftrightarrow \\
0,171573\ldots < {} & \frac{\gamma}{\beta} < 5,828427\ldots
\end{aligned}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η ΣΥΝΘΗΚΗ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΑ :



(ε΄) Σχήμα 5

$$AM = MB = \frac{\gamma}{2},\ AN = N\Gamma = \frac{\beta}{2}$$

$$B\Delta^2 = BM \cdot BA \Rightarrow B\Delta = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}$$

$$\Gamma\Delta^2 = \Gamma N \cdot \Gamma A \Rightarrow \Gamma\Delta = \frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

$$B\Gamma = B\Delta + \Gamma\Delta = \frac{\beta+\gamma}{\sqrt{2}}$$

$$A\Gamma < AB + B\Gamma \Rightarrow \beta < \gamma + \frac{\beta+\gamma}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

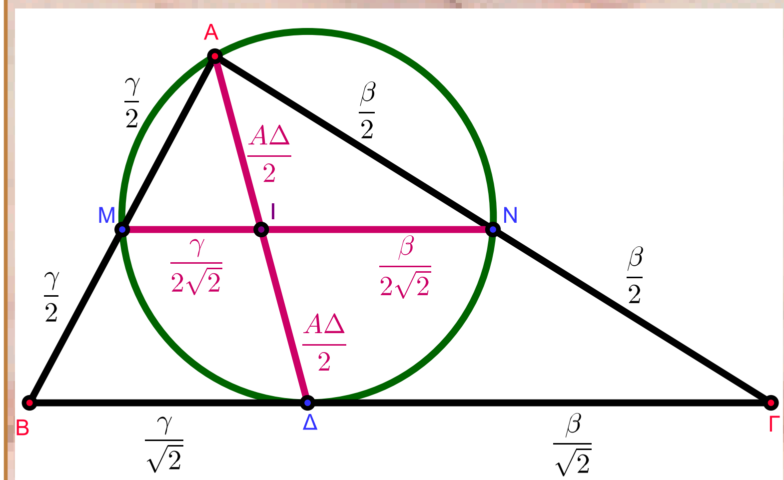
$$\frac{\beta}{\gamma} < \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$AB < A\Gamma + B\Gamma \Rightarrow \gamma < \beta + \frac{\beta+\gamma}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$3 - 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} < \frac{\beta}{\gamma}$$

$$3 - 2\sqrt{2} < \frac{\beta}{\gamma} < 3 + 2\sqrt{2}$$

Η ΣΥΝΘΗΚΗ ΕΙΝΑΙ ΙΚΑΝΗ :



(στ΄) Σχήμα 6

$\beta\,,\,\gamma \in \mathbb{R}_+$

$3-2\sqrt{2} < \dfrac{\beta}{\gamma} < 3+2\sqrt{2}$

$\dfrac{\beta}{\gamma} < \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow \beta < \gamma + \dfrac{\beta+\gamma}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} < \dfrac{\beta}{\gamma} \Rightarrow \gamma < \beta + \dfrac{\beta+\gamma}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{\beta+\gamma}{\sqrt{2}} < \beta+\gamma$

$\beta, \gamma, \dfrac{\beta+\gamma}{\sqrt{2}}$, πλευρές τριγώνου $AB\Gamma$

$AB=\gamma,\; B\Gamma = \dfrac{\beta+\gamma}{\sqrt{2}}\,,\; \Gamma A = \beta$

$B\Delta = \dfrac{\gamma}{\sqrt{2}}\,,\;\; \Gamma\Delta = \dfrac{\beta}{\sqrt{2}}$

Από νόμο συνημιτόνων στο $AB\Gamma$:

$\sigma\upsilon\nu\,\hat{B} = \dfrac{AB^2+B\Gamma^2-A\Gamma^2}{2\,AB\cdot B\Gamma} \Rightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\,\hat{B} = \dfrac{\sqrt{2}\,(3\,\gamma^2-\beta^2+2\,\gamma\,\beta)}{4\,\gamma\,(\gamma+\beta)}$

Από νόμο συνημιτόνων στο $AB\Delta$:

$\sigma\upsilon\nu\,\hat{B} = \dfrac{AB^2+B\Delta^2-A\Delta^2}{2\,AB\cdot B\Delta} \Rightarrow$

$A\Delta = \sqrt{\dfrac{\beta\,\gamma}{2}}$

M, N μέσα $\Rightarrow MN//B\Gamma, I$ μέσο

$MI = \dfrac{\gamma}{2\sqrt{2}}\,,\; NI = \dfrac{\beta}{2\sqrt{2}}$

$AI = I\Delta = \dfrac{A\Delta}{2} = \dfrac{\sqrt{\beta\,\gamma}}{2\sqrt{2}}$

$MI\cdot NI = \dfrac{\beta\,\gamma}{8} = AI\cdot I\Delta$

$A,\; M,\; \Delta,\; N$ ομοκυκλικά

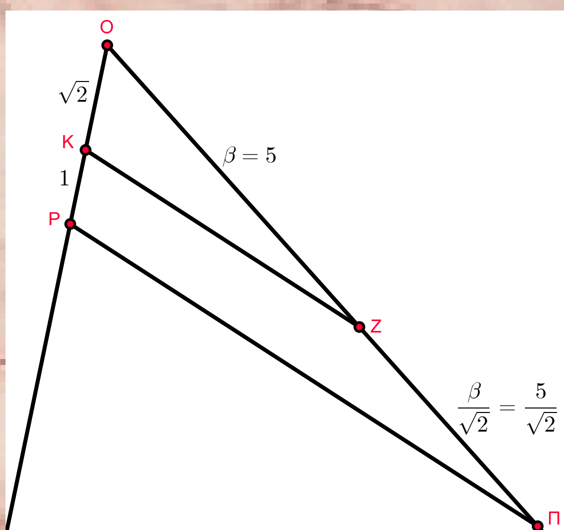
$B\Delta^2 = \dfrac{\gamma^2}{2} = BM\cdot BA$

$\Gamma\Delta^2 = \dfrac{\beta^2}{2} = \Gamma N\cdot \Gamma A$

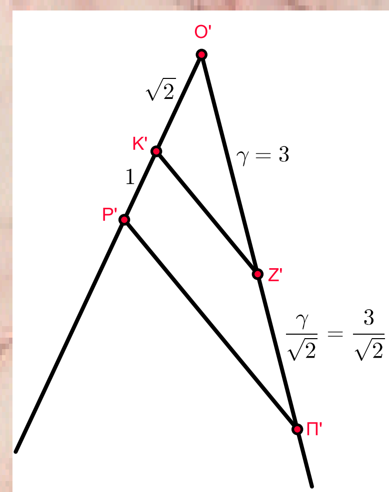
Ο κύκλος δια των $A,\; M,\; \Delta,\; N$ εφάπτεται της $B\Gamma$ στο Δ

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΖΗΤΟΥΜΕΝΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΜΕ ΚΑΝΟΝΑ ΚΑΙ ΔΙΑΒΗΤΗ

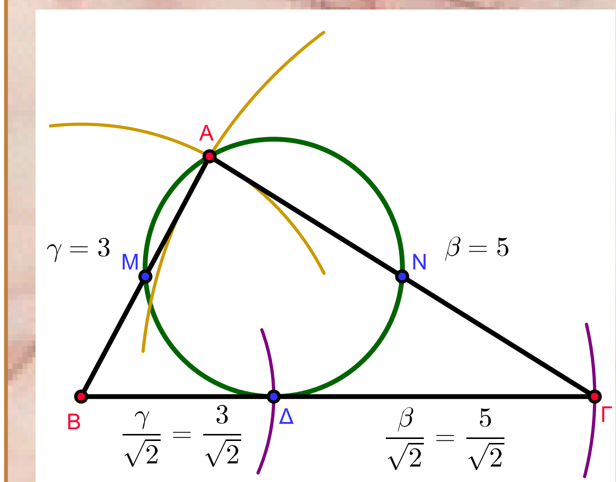
Τα διερευνούμενα τρίγωνα με πλευρές $AB=\gamma$, $B\Gamma=\dfrac{\beta+\gamma}{\sqrt{2}}$, $\Gamma A=\beta$ είναι κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη αν και μόνο αν $3-2\sqrt{2}<\dfrac{\beta}{\gamma}<3+2\sqrt{2}$ και τα β, γ είναι κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη.



(ζ′) Σχήμα 7

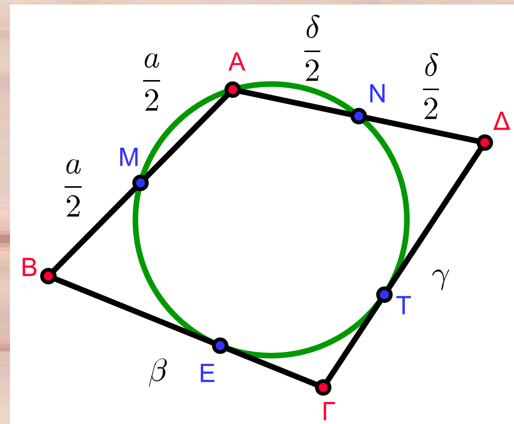


(η′) Σχήμα 8



(ϑ′) Σχήμα 9

ΕΣΤΩ ΚΥΡΤΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ $AB\Gamma\Delta$ ΜΕ ΜΗΚΗ ΠΛΕΥΡΩΝ
$AB = a$, $B\Gamma = \beta$, $\Gamma\Delta = \gamma$, $\Delta A = \delta$ ΚΑΙ ΓΩΝΙΕΣ $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$



(ι′) Σχήμα 10 M, N Μέσα

ΙΚΑΝΗ ΚΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ ΩΣΤΕ ΚΥΚΛΟΣ ΝΑ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ A ΤΑ ΜΕΣΑ M, N ΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ AB, $A\Delta$ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΩΣ ΚΑΙ ΝΑ ΕΦΑΠΤΕΤΑΙ ΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ ΣΤΑ E, T ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΩΣ ΕΙΝΑΙ :

$$\left(\beta - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \text{εφ}\, \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \left(\gamma - \frac{\delta}{\sqrt{2}}\right) \text{εφ}\, \frac{\hat{\Gamma}}{2} = a\, \frac{3\sqrt{2} - 4\ \text{συν}\, \hat{B}}{4\sqrt{2}\ \text{ημ}\, \hat{B}} = \delta\, \frac{3\sqrt{2} - 4\ \text{συν}\, \hat{\Delta}}{4\sqrt{2}\ \text{ημ}\, \hat{\Delta}}$$

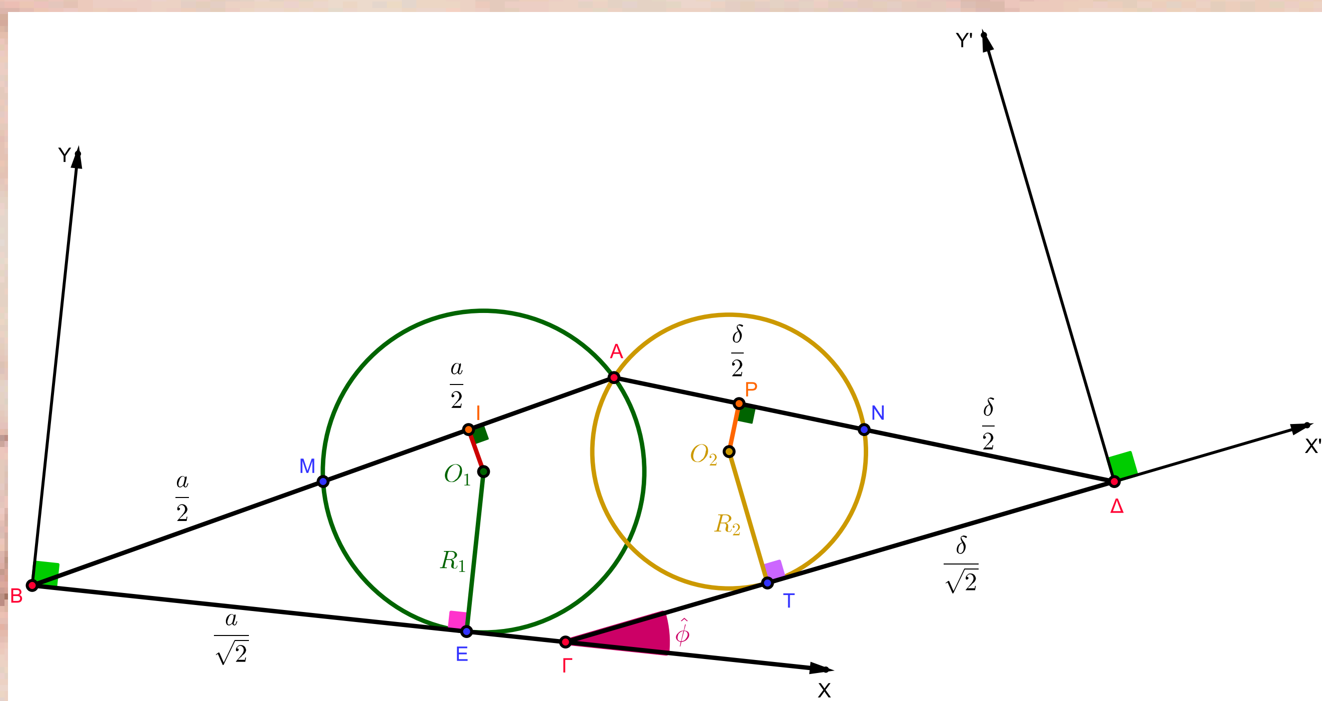
ΣΥΝΟΠΤΙΚΟ ΠΕΡΙΓΡΑΜΜΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Κύκλος (O_1, R_1) δια των A, M εφάπτεται της $B\Gamma$ σε σημείο της E αν και μόνο αν $BE^2 = BM \cdot BA \Rightarrow BE = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ και $\beta > \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Κύκλος (O_2, R_2) δια των A, N εφάπτεται της $\Gamma\Delta$ σε σημείο της T αν και μόνο αν $\Delta T^2 = \Delta N \cdot \Delta A \Rightarrow \Delta T = \dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$ και $\gamma > \dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$

$$\text{Ως προς } XBY,\ O_1(x_1, y_1) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}},\ a\,\frac{3\sqrt{2} - 4\,\text{συν}\,\hat{B}}{4\sqrt{2}\,\text{ημ}\,\hat{B}}\right),\ R_1 = a\,\frac{3\sqrt{2} - 4\,\text{συν}\,\hat{B}}{4\sqrt{2}\,\text{ημ}\,\hat{B}}$$

$$\text{Ως προς } X'\Delta Y',\ O_2(x_2', y_2') = \left(\frac{-\delta}{\sqrt{2}},\ \delta\,\frac{3\sqrt{2} - 4\,\text{συν}\,\hat{\Delta}}{4\sqrt{2}\,\text{ημ}\,\hat{\Delta}}\right),\ R_2 = \delta\,\frac{3\sqrt{2} - 4\,\text{συν}\,\hat{\Delta}}{4\sqrt{2}\,\text{ημ}\,\hat{\Delta}}$$

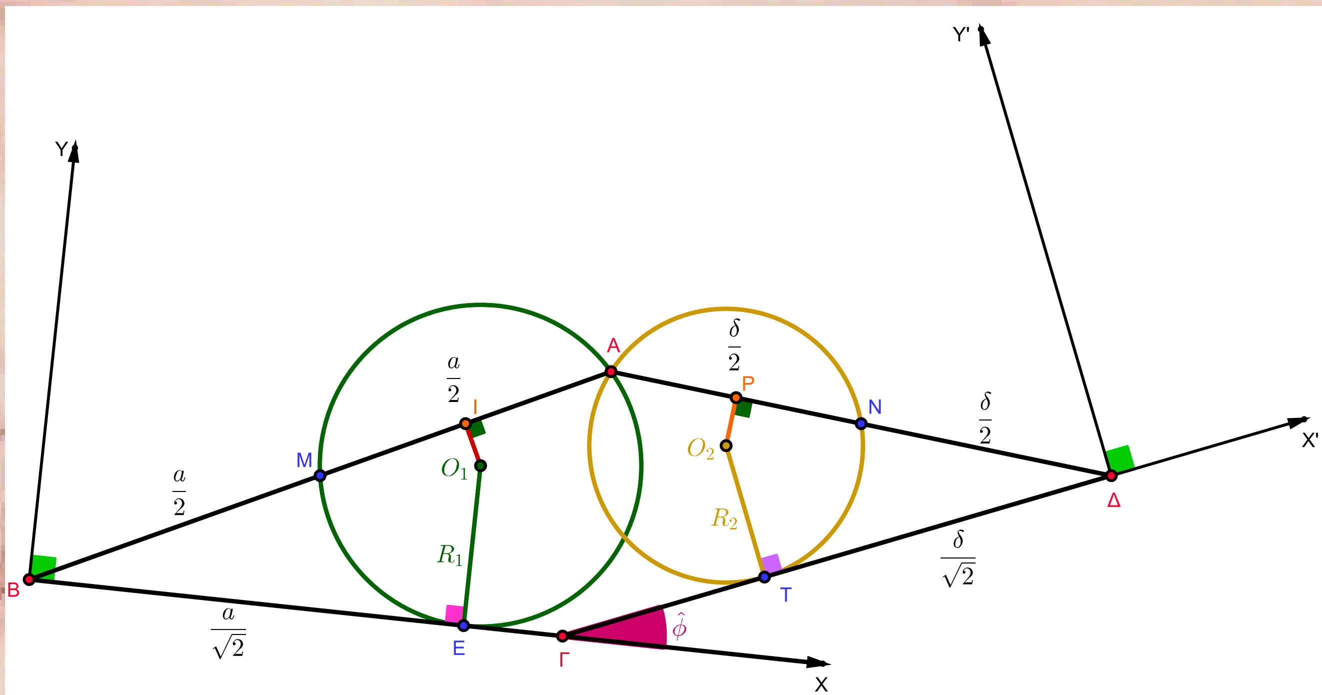


(ια΄) Σχήμα 11

Κύκλος δια των A, M, N εφάπτεται των $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ στα E, T αντιστοίχως αν και μόνο αν έχει ταυτόχρονα τις ιδιότητες των κύκλων (O_1, R_1), (O_2, R_2) δηλαδή αν και μόνο αν, $O_1 \equiv O_2$, $R_1 = R_2$, $\Gamma E = \Gamma T$. Πρέπει τα O_1, O_2 να εκφρασθούν ως προς το ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Οι εξισώσεις,

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_2' \,\text{συν}\,\hat{\Gamma} - y_2' \,\text{ημ}\,\hat{\Gamma} + \beta - \gamma \,\text{συν}\,\hat{\Gamma} \\ y_2 &= \quad x_2' \,\text{ημ}\,\hat{\Gamma} - y_2' \,\text{συν}\,\hat{\Gamma} + \gamma \,\text{ημ}\,\hat{\Gamma} \end{aligned}$$

μεταφέρουν το XBY παράλληλα κατά διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$, το περιστρέφουν κατά γωνία $\hat{\phi} = \pi - \hat{\Gamma}$, (θετική φορά), και κατόπιν το μεταφέρουν παράλληλα κατά διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



(ιβ') Σχήμα 12