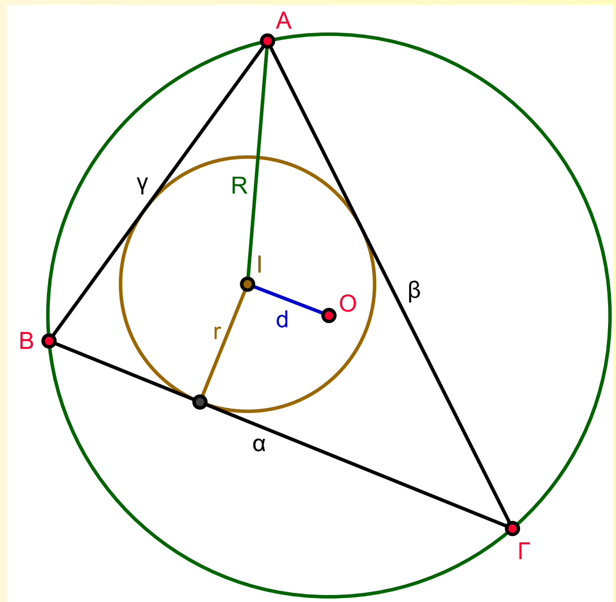
ΝΕΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ EULER



R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, O το περίκεντρο, I το ένκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$. Ισχύει,

$$OI^2 = d^2 = R\,(R - 2\,r) \geq 0,$$

γνωστή ως φόρμουλα του Euler από την οποία άμεσα προκύπτει ότι,

$$R \geq 2\,r,$$

γνωστή ως γεωμετρική ανισότητα του Euler.

Πρώτη εμφάνιση και απόδειξη του αποτελέσματος το 1746 από τον William Chapple, “An Essey On The Properties Of Triangles Inscribed In And Circumscribed About Two Given Circles”, Miscellanea Curiosa, **4**, p.p. 117–124.
Δεύτερη εμφάνιση του αποτελέσματος και απόδειξη το 1767 από τον Leonard Euler, “Solutio Facilis Problematum Quorumdam Geometricorum Difficillimorum”, Novi Comentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, **11**, p.p. 103–123.

ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ EULER

Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών, R, r οι ακτίνες του περιγεγραμμένου, εγγεγραμμένου κύκλου αντιστοίχως τριγώνου $AB\Gamma$ οι ακόλουθες βελτιώσεις της γεωμετρικής ανισότητας του Euler έχουν καταγραφεί, (τα αθροίσματα και γινόμενα θεωρούνται επί των κυκλικών μεταθέσεων των α, β, γ),

- $$\frac{R}{r} \geq \frac{\alpha\,\beta\,\gamma + \Sigma\,\alpha^3}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma} \geq \left(\Sigma\,\frac{\alpha}{\beta}\right) - 1 \geq \frac{2}{3}\left(\Sigma\,\frac{\alpha}{\beta}\right) \geq 2, \tag{1}$$

$$\frac{R}{r} \geq \sqrt{\left[\left(\Sigma\,\frac{\alpha}{\beta}\right) - 1\right]^2 + \frac{1}{4}\left[\left(\Sigma\,\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha-\beta}\right) - 3\right]} \geq \left(\Sigma\,\frac{\alpha}{\beta}\right) - 1 \geq \frac{2}{3}\left(\Sigma\,\frac{\alpha}{\beta}\right) \geq 2, \tag{2}$$

$$\frac{R}{r} \geq \max\left\{\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}, \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right\} \geq 2. \tag{3}$$

D. Veljan and S. Wu, “Parametrized Klamkin’s Inequality and Improved Euler’s Inequality”, Mathematical Inequalities and Applications, Vol. 11, No. 4, (2008), p.p. 729–737

- $$\frac{R}{r} \geq \sum \frac{\beta+\gamma}{3\,\alpha} \geq \sqrt[3]{\prod\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)} \geq 2, \tag{4}$$
  M. Bencze, Exercise 3087, Crux Mathematicorum, Vol. 31, No. 7, (2005), p.459.
- $$\frac{R}{r} \geq \frac{2\,\sum \alpha^2}{\sum \alpha\,\beta} \geq 2, \tag{5}$$
  A. Posamentier and I. Lehmann, “The Secrets of Triangles”, Prometheus Books, (2012).
- $$\frac{R}{r} \geq \frac{2\,\sum \alpha\,\sum \alpha^3}{(\sum \beta\,\gamma)^2} \geq 2, \tag{6}$$
  D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric and V. Volenec, “Recent Advances in Geometric Inequalities”, Kluwer Academic Publishers, (1989).

Γενικώς αν με s συμβολίσουμε την ημιπερίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει,

$$\frac{R}{r} \geq \max\left\{\sqrt{\left[\left(\sum \frac{\alpha}{\beta}\right)-1\right]^2+\frac{1}{4}\left[\left(\sum \frac{s-\alpha}{s-\beta}\right)-3\right]}, \frac{\prod \alpha+\sum \alpha^3}{2\,\prod \alpha}, \frac{2\,\sum \alpha\,\sum \alpha^3}{(\sum \beta\,\gamma)^2}\right\}.$$

ΝΕΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ EULER

Θεωρούμε την ακολουθία,

$$E_\nu = \frac{(2\,\nu+1)\,\alpha\,\beta\,\gamma+\sum \alpha^3}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma+\nu\,\prod(\beta+\gamma-\alpha)}\,, \nu \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ E_ν

- Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει $\dfrac{R}{r} \geq E_\nu$.

Απόδειξη

Έστω $x \in (-2, +\infty)$. Θα δείξουμε την ευρύτερη ανισότητα,

$$\frac{R}{r} \geq \frac{(2\,x+1)\,\alpha\,\beta\,\gamma + \Sigma\,\alpha^3}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma + x\;\Pi(\beta+\gamma-\alpha)} = E(x)\,. \tag{8}$$

$R = \dfrac{\alpha\,\beta\,\gamma}{4\,(AB\Gamma)}$, $r = \dfrac{(AB\Gamma)}{s} \Rightarrow \dfrac{R}{r} = \dfrac{2\,\alpha\,\beta\,\gamma}{\Pi(\beta+\gamma-\alpha)}$. Επίσης, $-2 \geq -\dfrac{R}{r}$. Παίρνουμε,

$$x > -2 \geq -\frac{R}{r} \Rightarrow x\,\frac{r}{R} > -1 \Rightarrow 1 + x\,\frac{\Pi(\beta+\gamma-\alpha)}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma} > 0 \Leftrightarrow 1 + x\,\frac{r}{R} > 0. \tag{9}$$

$$\frac{R}{r} \geq \frac{(2\,x+1)\,\alpha\,\beta\,\gamma + \Sigma\,\alpha^3}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma + x\;\Pi(\beta+\gamma-\alpha)} \Leftrightarrow \frac{R}{r} \geq \frac{(2\,x+1)\,\alpha\,\beta\,\gamma + \Sigma\,\alpha^3}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma}\;\frac{2\,\alpha\,\beta\,\gamma}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma + x\;\Pi(\beta+\gamma-\alpha)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{R}{r} \geq \left(\frac{\alpha\,\beta\,\gamma + \Sigma\,\alpha^3}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma} + x\right)\;\frac{1}{1 + x\,\frac{\Pi(\beta+\gamma-\alpha)}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma}} \Leftrightarrow \frac{R}{r} \geq \left(\frac{\alpha\,\beta\,\gamma + \Sigma\,\alpha^3}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma} + x\right)\;\frac{1}{1 + x\,\frac{r}{R}} \overset{(9)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{R}{r}\,\left(1 + x\,\frac{r}{R}\right) \geq \frac{\alpha\,\beta\,\gamma + \Sigma\,\alpha^3}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma} + x \Leftrightarrow \frac{R}{r} + x \geq \frac{\alpha\,\beta\,\gamma + \Sigma\,\alpha^3}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma} + x \Leftrightarrow \frac{R}{r} \geq \frac{\alpha\,\beta\,\gamma + \Sigma\,\alpha^3}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma}\,,$$

που ισχύει από την (1). Η (8) για $x = \nu \in \mathbb{N}$ δίνει την αποδεικτέα.

Σημειώνουμε ότι η ισότητα $\dfrac{R}{r} = E_\nu$ ισχύει στην περίπτωση που το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο γιατί τότε $\dfrac{R}{r} = 2 = E_\nu$. Σε κάθε άλλη περίπτωση ισχύει $\dfrac{R}{r} > E_\nu$.

- Για κάθε μη ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει $E_{\nu+1} > E_\nu$.

Απόδειξη

$$\begin{aligned}
E_{\nu+1} > E_\nu \;&\Leftrightarrow\; \frac{(2\,\nu+3)\,\alpha\,\beta\,\gamma+\Sigma\,\alpha^3}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma+(\nu+1)\;\Pi(\beta+\gamma-\alpha)} > \frac{(2\,\nu+1)\,\alpha\,\beta\,\gamma+\Sigma\,\alpha^3}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma+\nu\;\Pi(\beta+\gamma-\alpha)} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\; \frac{(2\,\nu+3)\,\alpha\,\beta\,\gamma+\Sigma\,\alpha^3}{(2\,\nu+1)\,\alpha\,\beta\,\gamma+\Sigma\,\alpha^3} > \frac{2\,\alpha\,\beta\,\gamma+(\nu+1)\;\Pi(\beta+\gamma-\alpha)}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma+\nu\;\Pi(\beta+\gamma-\alpha)} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\; \frac{2\,\alpha\,\beta\,\gamma}{(2\,\nu+1)\,\alpha\,\beta\,\gamma+\Sigma\,\alpha^3}+1 > \frac{\Pi(\beta+\gamma-\alpha)}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma+\nu\;\Pi(\beta+\gamma-\alpha)}+1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\; \frac{2\,\alpha\,\beta\,\gamma}{\Pi(\beta+\gamma-\alpha)} > \frac{(2\,\nu+1)\,\alpha\,\beta\,\gamma+\Sigma\,\alpha^3}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma+\nu\;\Pi(\beta+\gamma-\alpha)} \Leftrightarrow \frac{R}{r} > E_\nu,
\end{aligned}$$

που ισχύει από την προηγούμενη ιδιότητα.

- $$\begin{aligned}
\lim_{\nu\to+\infty} E_\nu \;&=\; \lim_{\nu\to+\infty} \frac{(2\,\nu+1)\,\alpha\,\beta\,\gamma+\Sigma\,\alpha^3}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma+\nu\;\Pi(\beta+\gamma-\alpha)} = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{\nu}\right)\,\alpha\,\beta\,\gamma+\frac{1}{\nu}\,\Sigma\,\alpha^3}{\frac{2}{\nu}\,\alpha\,\beta\,\gamma+\Pi(\beta+\gamma-\alpha)} = \\
&=\; \frac{2\,\alpha\,\beta\,\gamma}{\Pi(\beta+\gamma-\alpha)} = \frac{R}{r}\,.
\end{aligned}$$

Από τις ιδιότητες της ακολουθίας E_ν προκύπτει ότι για κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε,

$$\frac{R}{r} \geq \cdots \geq E_\nu \geq E_{\nu-1} \geq \cdots \geq E_{\nu_0} \geq \max\left\{\sqrt{\left[\left(\sum \frac{\alpha}{\beta}\right) - 1\right]^2 + \frac{1}{4}\left[\left(\sum \frac{s-\alpha}{s-\beta}\right) - 3\right]}, \frac{\alpha\,\beta\,\gamma + \sum \alpha^3}{2\,\alpha\,\beta\,\gamma}, \frac{2\,\sum \alpha\,\sum \alpha^3}{(\sum \beta\,\gamma)^2}\right\}.$$

Με την ισότητες να ισχύουν στην περίπτωση του ισοπλεύρου τριγώνου.